Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'Automne 2024-2025

Cursus préparatoire : Analyse 1 et Algèbre 1 11 décembre 2024

Devoir surveillé N°4

Durée : 1h30

Le candidat ou la candidate attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Dans toutes les questions, il sera tenu le plus grand compte de la rigueur de la rédaction ; **toute réponse insuffisamment justifiée sera considérée comme nulle.** *Calculatrices et notes de cours sont interdites. Le sujet est* ***recto-verso****. Le barème indiqué est approximatif.*

Exercice 1 (8 points)**.**

1. Sachant qu'il admet une racine réelle, déterminer cette racine réelle, et puis factoriser dans $\mathbb{C}$ le polynôme
$$P(z) = z^3 + (1-3i)z^2 - (6-i)z + 10i.$$
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer
$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(kx) + i \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(kx).$$
En déduire les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(kx) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(kx).$$

Exercice 2 (6 points)**.**

1. Calculer le reste de la division de 10^{100} par 13, et par 19.
2. Résoudre le système de congruences dans $\mathbb{Z}$:
$$\begin{cases} x \equiv 3 \pmod{13}, \\ x \equiv 9 \pmod{19}. \end{cases}$$
3. En déduire le reste de la division de 10^{100} par 247.

Exercice 3 (4 points)**.**

1. Déterminer la forme complexe de la rotation r de centre $\Omega(-1)$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$. Préciser l'image par r du point A d'affixe $e^{-i\pi/3}$.
2. Soit t la transformation qui à tout point M d'affixe z associe le point M_1 d'affixe $z_1 = z - \sqrt{3}i$.

a) Caractériser la transformation t.

b) Donner la forme complexe de $t \circ r$.
Reconnaître cette nouvelle transformation en déterminant ses éléments caractéristiques.

Exercice 4 (8 points)**.**
On considère l'application $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}\left(\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}\right) & \text{si x} \neq 0, \\ 0 & \text{si x} = 0. \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $[-1, 1]$.
2. Montrer que f est dérivable sur $]-1,1[$ et démontrer que

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1+x^2}}{x^2\sqrt{1-x^4}} & \text{si } x \in]-1,1[\setminus\{0\}, \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

3. Montrer que l'application dérivée $f' :]-1,1[\to \mathbb{R}$ est continue sur $]-1,1[$ et calculer ses limites en -1^+ et 1^-.
4. Dresser le tableau de variation de f et tracer son graphe. En déduire que f est injective.
5. On désigne par $\hat{f}$ la bijection de $[-1, 1]$ sur $f([-1, 1])$ définie par $\hat{f}(x) = f(x)$, pour tout $x \in [-1, 1]$ et on désigne par $(\hat{f})^{-1}$ sa bijection réciproque. Justifier l'existence et déterminer $((\hat{f})^{-1})'(0)$.

Exercice 5 (4 points)**.**
On rappelle que $\binom{n}{k} = \prod_{j=1}^{k} \frac{n-j+1}{j}$ pour $1 \leq k \leq n$.

1) Énoncer le lemme de Gauss.

2) Montrer que $\forall (k, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $\left[k \wedge n = 1 \Longrightarrow n | \binom{n}{k}\right]$.

3) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(n+1) | \binom{2n}{n}$.