Mathématiques - DS n°3 CUPGE

Documents et calculettes interdits

Exercice 1 : Relations.

1. On considère sur $\mathbb{R}$ la relation R définie par $xRy \Leftrightarrow x^3 - y^3 = 3(x-y)$.
   (a) Montrer que R est une relation d'équivalence.
   (b) Déterminer le nombre d'éléments appartenant à la classe d'équivalence d'un réel x (on distinguera plusieurs cas selon la valeur de x).
   Indication. Étudier une fonction bien choisie.
2. Soit E un ensemble, et R une relation sur E. On définit une relation R_t sur E comme suit :

$$xR_ty \Leftrightarrow \exists\, n \in \mathbb{N}^\times\ \exists\, x_0,\ldots,x_n \in E\ (x = x_0 \wedge x_n = y \wedge \forall\, k \in [\![1,n]\!]\ x_{k-1}Rx_k).$$

   (a) Montrer que R_t est transitive.
   (b) Montrer que xRy implique xR_ty. En particulier, si R est reflexive, R_t aussi.
   (c) Montrer que si R est symétrique et pour tout $x \in \mathbb{R}$ il y a $y \in \mathbb{R}$ avec xRy, alors R_t est une relation d'équivalence.

Solution.

1. (a) On a xRy ssi $x^3 - 3x = y^3 - 3y$. C'est clairement réflexive et symétrique ; si en plus $y^3 - 3y = z^3 - 3z$, alors $x^3 - 3x = y^3 - 3y = z^3 - 3z$, donc R est transitive. Ainsi R est une relation d'équivalence.
   (b) La classe de x est déterminée par la valeur de $f(x) = x^3 - 3x$. Étudions donc la fonction f. On a $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3\,(x^2-1)$, ce qui a deux zéros ± 1. Ceci donne la table de variations

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

   Ainsi si $f(x) = 2$ ou $f(x) = -2$ il y a deux antecédants et la classe de x a deux éléménts ; si $f(x) \in]-2,2[$ il y a trois antecédants et la classe de x a trois éléments, et si $f(x) \in \mathbb{R} \setminus [-2,2]$ il y a un seul antecédant et la classe de x n'a qu'un seul élément.
2. (a) Si xR_ty il y a $n \in \mathbb{N}^\times$ et $x_1,\ldots,x_{n-1} \in \mathbb{R}$ tels que $x_{k-1}Rx_k$ pour $k \in [\![1,n]\!]$, où $x_0 = x$ et $x_n = y$. Si de plus yR_tz il y a $m \in \mathbb{N}$ et $x_{n+1},\ldots,x_{n+m-1} \in \mathbb{R}$ tels que $x_{n+k-1}Rx_{n+k}$ pour $k \in [\![1,m]\!]$, où $x_n = y$ et $x_{n+m} = z$. Alors $x_0,\ldots,x_{n+m}$ témoignent du fait que xR_tz, et R_t est bien transitive.
   (b) Si xRy, alors $n = 1$ et $x_0 = x$ et $x_1 = y$ témoignent du fait que xR_ty. En particulier, si xRx alors xR_tx, et la réflexivité de R implique celle de R_t.
   (c) Soit R symétrique. Soit xR_ty, témoigné par n et $x = x_0, \ldots x_n = y$. Alors n et $y = x_n, x_{n-1}, \ldots, x_0 = x$ témoignent du fait que yR_tx, et R_t est symétrique. Soit maintenant $x \in \mathbb{R}$, et choisissons $y \in \mathbb{R}$ avec xRy. Alors xR_ty ; par symétrie yR_tx, et par transitivité xR_tx. Ainsi R_t est réflexive, symétrique et transitive, et donc une relation d'équivalence.

Exercice 2 : Les réels.

Soit G un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$ non réduit à $\{0\}$ (c'est-à-dire une partie de $\mathbb{R}$ non-vide et close par addition et soustraction).

1. Montrer que $G \cap \mathbb{R}_+^\times$ possède une borne inférieure α.
2. Montrer que si $\alpha > 0$, alors $\alpha \in G$. En déduire que $G = \alpha\mathbb{Z}$.
3. Montrer que si $\alpha = 0$, alors G est dense dans $\mathbb{R}$.

Solution.

1. Puisque G n'est pas réduite à $\{0\}$, il y a $x \in G \setminus \{0\}$. Alors soit $x > 0$, soit $-x > 0$. Or, $x \in G$ implique $-x \in G$, donc $G \cap \mathbb{R}_+^\times \neq \emptyset$, et est minoré par 0. D'après l'axiome de la borne supérieure, toute partie X non-vide majoré de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure. Mais si X est non-vide et minoré par r, alors $-X = \{-x : x \in X\}$ est non-vide et majoré par $-r$, et $-\sup(-X) = \inf X$. Ainsi toute partie non-vide et minoré de $\mathbb{R}$ possède une borne inférieure. En particulier $\alpha = \inf(G \cap \mathbb{R}_+^\times)$ existe.
2. Soit $\alpha > 0$, et supposons $\alpha \notin G$. Alors il y $g \in G \cap]\alpha, 2\alpha[$, puis il y a $g' \in G \cap]\alpha, g[$. Ainsi $0 < g - g' < \alpha$. Mais $g - g' \in G \cap \mathbb{R}_+^\times$, ce qui contredit le choix de α. Donc $\alpha \in G$.

   Puisque G est clos par opposé et addition, on a $\alpha\mathbb{Z} \subseteq G$. Supposons qu'il y ait $g \in G \setminus \alpha\mathbb{Z}$, et soit $n = E(g/\alpha)$ (la partie entière). Alors $n \leq g/\alpha < n+1$, et la première inégalité est stricte puisque $g \neq \alpha n$. Donc $0 < g - n\alpha < \alpha$. Or, $g - n\alpha \in G$, ce qui contredit le choix de α. Ainsi $G = \alpha\mathbb{Z}$.
3. Supposons $\alpha = 0$. Alors pour tout entier $n > 0$ il y a $g_n \in G$ avec $0 < g_n < \frac{1}{n}$. Soit $a < b$ deux réels ; on choisit $n = E(\frac{1}{b-a}) + 1$. Alors $0 < g_n < \frac{1}{n} < b - a$. Soit $k = E(\frac{a}{g_n})$. Alors $k \leq \frac{a}{g_n} < k+1$, d'où

   $$kg_n \leq a < (k+1)\, g_n = kg_n + g_n < a + (b-a) = b.$$

   Puisque $(k+1)\, g_n \in G$ on a bien $]a, b[\cap G \neq \emptyset$, et G est dense dans $\mathbb{R}$.

<u>Exercice 3 :</u> Suites.

Une suite de Cauchy est une suite réelle $(u_n)_n$ vérifiant la propriété suivante :

$$\forall \epsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall p, q > n_0 \quad |u_p - u_q| < \epsilon$$

1. Montrer qu'une suite de Cauchy est nécessairement bornée.
2. Montrer qu'une suite convergente est une suite de Cauchy.
3. Montrer la réciproque : toute suite de Cauchy converge nécessairement.

Solution.

1. Soit $(u_n)_n$ une suite de Cauchy. Par définition, pour $\epsilon = 1$ il y a $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p, q > n_0$ on a $|u_p - u_q| < 1$. En particulier, pour tout $p > n_0$ on a $u_{n_0+1} - 1 < u_p < u_{n_0+1} + 1$, ce qui montre que $(u_n)_n$ est bornée.
2. Soit maintenant $(u_n)_n$ une suite convergente de limite ℓ, et $\epsilon > 0$. Alors il y a $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n > n_0$ on a $|u_n - \ell| < \epsilon/2$. Par l'inégalité triangulaire on obtient pour $p, q > n_0$ que

   $$|u_p - u_q| = |u_p - \ell + \ell - u_q| \leq |u_p - \ell| + |\ell - u_q| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

   Ainsi $(u_n)_n$ est une suite de Cauchy.
3. Soit maintenant $(u_n)_n$ une suite de Cauchy. Puisque la suite est bornée, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass elle possède une suite extraite $(u_{\sigma(n)})_n$ convergente, de limite ℓ, où $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une fonction strictement croissante. Soit $\epsilon > 0$, et $n_0 \in \mathbb{N}$ telle que pour $p, q > n_0$ on a $|u_p - u_q| < \frac{\epsilon}{2}$, et pour $n > n_0$ on a $|u_{\sigma(n)} - \ell| < \frac{\epsilon}{2}$. Soit $n_1 = \sigma(n_0 + 1) \geq n_0 + 1 > n_0$. Alors pour $n \geq n_1$ on a

   $$|u_n - \ell| = |u_n - u_{n_1} + u_{n_1} - \ell| \leq |u_n - u_{n_1}| + |u_{\sigma(n_0+1)} - \ell| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

   Ainsi $(u_n)_n$ converge vers ℓ.

<u>Exercice 4 :</u> Les complexes.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

   $$(a) \quad iz^2 + (2-3i)z + 5i - 5 = 0 \qquad\qquad (b) \quad z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0.$$

2. (a) Déterminer l'écriture complexe de la symétrie par rapport à la droite d'équation cartésienne $y = x$.

   (b) Caractériser géométriquement l'application complexe $f(z) = (1-i)z + 2i - 1$.

Solution.

1. (a) Le discriminant est

$$\Delta = (2-3i)^2 - 4i(5i-5) = 4 - 9 - 12i + 20 + 20i = 15 + 8i.$$

Soit $\delta = a + ib \in \mathbb{C}$ avec $\Delta = \delta^2 = a^2 - b^2 + 2abi$. Alors

$$a^2 - b^2 = 15, \qquad 2ab = 8, \quad \text{et} \quad a^2 + b^2 = |\delta|^2 = |\Delta| = \sqrt{15^2 + 8^2} = \sqrt{225 + 64} = \sqrt{289} = 17.$$

Donc $2a^2 = 32$, d'où $a = \pm 4$ et $b = \frac{4}{a} = \pm 1$. Ainsi $\delta = \pm(4+i)$, et

$$z_1 = \frac{-(2-3i) + (4+i)}{2i} = \frac{2+4i}{2i} = 2 - i,$$
$$z_2 = \frac{-(2-3i) - (4+i)}{2i} = \frac{-6+2i}{2i} = 1 + 3i.$$

Contrôle : $i[(2-i)+(1+3i)] = i(3+2i) = -(2-3i)$ et $i(2-i)(1+3i) = i(2+3+6i-i) = 5i-5$.

(b) On a $z \neq 1$; la somme géométrique de rapport $-z$ donne donc

$$0 = 1 - z + z^2 - z^3 + z^4 = 1 + (-z) + (-z)^2 + (-z)^3 + (-z)^4 = \frac{(-z)^5 - 1}{(-z) - 1},$$

d'où $(-z)^5 - 1 = 0$ et $(-z)^5 = 1$. Les racines 5mes de l'unité sont $e^{i2k\pi/5}$ avec $k \in [\![0, 4]\!]$. Ainsi

$$z \in \{-e^{i2k\pi/5} : k \in [\![0, 4]\!]\}.$$

2. (a) Cette symétrie échange la partie réelle et la partie imaginaire : $a + ib \mapsto b + ia = i(a - ib)$, c'est-à-dire $z \mapsto i\bar{z}$.
Alternative. Soit $\omega = e^{i\pi/4}$ la rotation par $\pi/4$. Alors l'application recherchée est

$$z \mapsto \omega\overline{\omega^{-1}z} = e^{i\pi/4}\overline{e^{-i\pi/4}}\bar{z} = e^{i\pi/4}e^{i\pi/4}\bar{z} = e^{i\pi/2}\bar{z} = i\bar{z}.$$

(b) On a $1 - i \neq 1$. Il s'agit donc d'une homothétie-rotation d'angle $\arg(1-i) = -\frac{\pi}{4}$ et rapport $|1-i| = \sqrt{2}$. On cherche le point fixe, et donc l'affixe du centre : $z = f(z) = (1-i)z + 2i - 1$, d'où $iz = 2i - 1$ et $z = 2 + i$.