Mathématiques - DS n°3 CUPGE

Documents et calculettes interdits

Exercice 1 : Relations.

1. On considère sur $\mathbb{R}$ la relation R définie par $xRy \Leftrightarrow x^3 - y^3 = 3(x-y)$.
   (a) Montrer que R est une relation d'équivalence.
   (b) Déterminer le nombre d'éléments appartenant à la classe d'équivalence d'un réel x (on distinguera plusieurs cas selon la valeur de x).
   Indication. Étudier une fonction bien choisie.
2. Soit E un ensemble, et R une relation sur E. On définit une relation R_t sur E comme suit :

$$xR_ty \Leftrightarrow \exists\, n \in \mathbb{N}^\times\ \exists\, x_0, \ldots, x_n \in E\ (x = x_0 \wedge x_n = y \wedge \forall\, k \in [\![1, n]\!]\ x_{k-1}Rx_k).$$

   (a) Montrer que R_t est transitive.
   (b) Montrer que xRy implique xR_ty. En particulier, si R est reflexive, R_t aussi.
   (c) Montrer que si R est symétrique et pour tout $x \in \mathbb{R}$ il y a $y \in \mathbb{R}$ avec xRy, alors R_t est une relation d'équivalence.

Exercice 2 : Les réels.

Soit G un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$ non réduit à $\{0\}$ (c'est-à-dire une partie de $\mathbb{R}$ non-vide et close par addition et soustraction).

1. Montrer que $G \cap \mathbb{R}_+^\times$ possède une borne inférieure α.
2. Montrer que si $\alpha > 0$, alors $\alpha \in G$. En déduire que $G = \alpha\mathbb{Z}$.
3. Montrer que si $\alpha = 0$, alors G est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 3 : Suites.

Une suite de Cauchy est une suite réelle $(u_n)_n$ vérifiant la propriété suivante :

$$\forall\, \epsilon > 0\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall p, q > n_0\quad |u_p - u_q| < \epsilon$$

1. Montrer qu'une suite de Cauchy est nécessairement bornée.
2. Montrer qu'une suite convergente est une suite de Cauchy.
3. Montrer la réciproque : toute suite de Cauchy converge nécessairement.

Exercice 4 : Les complexes.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$$(a)\quad iz^2 + (2-3i)z + 5i - 5 = 0 \qquad\qquad (b)\quad z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0.$$

2. (a) Déterminer l'écriture complexe de la symétrie par rapport à la droite d'équation cartésienne $y = x$.
   (b) Caractériser géométriquement l'application complexe $f(z) = (1-i)z + 2i - 1$.