

Devoir surveillé N°3
Durée : 1h30

Le candidat ou la candidate attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Dans toutes les questions, il sera tenu le plus grand compte de la rigueur de la rédaction ; **toute réponse insuffisamment justifiée sera considérée comme nulle.** Calculatrices et notes de cours sont interdites. Le sujet est **recto-verso**. Le barème indiqué est approximatif.

Exercice 1 (6 points). Soit $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite numérique définie par

$$\begin{cases} b_0 = \frac{3}{2} \\ b_{n+1} = b_n^2 - 2b_n + 2 \end{cases} \quad (1)$$

1. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq b_n \leq 2$. *Indication : considérer $b_{n+1} - 1$*
2. Démontrer que la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
3. En déduire que la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$.
4. Justifier que $\ell = \ell^2 - 2\ell + 2$ et déterminer la limite ℓ .

Solution:

1. Remarquer que $b_{n+1} - 1 = b_n^2 - 2b_n + 1 = (b_n - 1)^2$. Ensuite pour $n \in \mathbb{N}$, on pose la proposition

$$P_n : 1 \leq b_n \leq 2$$

Initialisation : $b_0 = 3/2$ alors P_0 est vraie Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons P_n vraie donc $1 \leq b_n \leq 2 \Leftrightarrow 0 \leq b_n - 1 \leq 1$. Puisque la fonction $x \mapsto x^2$ est croissante sur $[0, +\infty[$ et fixe 0 et 1, nous obtenons donc que

$$0^2 \leq (b_n - 1)^2 \leq 1^2 \Rightarrow 1 \leq b_{n+1} = (b_n - 1)^2 + 1 \leq 2$$

c'est-à-dire que P_{n+1} vraie.

2. On calcule $b_{n+1} - b_n = b_n^2 - 3b_n + 2 = (b_n - 1)(b_n - 2)$. Par la question précédente, on a donc $b_{n+1} - b_n \leq 0$ ce qui implique que (b_n) est décroissante.
3. Nous avons donc une suite décroissante bornée inférieurement par 1, donc la suite converge vers un réel ℓ . (on peut même ajouter que $1 \leq \ell \leq 2$).

4. Par produit et somme de limites on a que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (b_n^2 - 2b_n + 2) = \ell^2 - 2\ell + 2$ et, par ailleurs,

$$\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (b_n^2 - 2b_n + 2) = \ell^2 - 2\ell + 2.$$

On a donc que $\ell = \ell^2 - 2\ell + 2$ ssi ℓ est racine du polynôme $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$ ssi $\ell = 1$ ou $\ell = 2$. Puisque (u_n) est décroissante et $u_0 = 3/2 < 2$, la seule possibilité est $\ell = 1$.

Exercice 2 (2 points). Soit A et B deux parties non-vides et bornées de $\mathbb{R}$.

Vrai ou **faux** ? (Attention les points seront accordés pour la justification seulement !)

1. $A \subseteq B \Rightarrow \sup A \leq \sup B$,
2. $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$,
3. $\sup A + \sup B = \sup(A \cup B)$.

Solution:

1. Vrai. $\forall x \in \mathbb{R}, x \in A \Rightarrow x \in B$ Donc tous les majorants de B sont des majorants de A . En particulier, $\sup B$ majore A et donc $\sup A \leq \sup B$.
2. Vrai. Notons $M = \max(\sup A, \sup B)$ alors $\forall x \in A \cup B$, on a (par définition) $x \in A$ ou $x \in B$ et donc, selon les cas $x \leq \sup A$ ou $x \leq \sup B$ et donc, dans tous les cas, $x \leq M$. Nous venons de montrer que M majore $A \cup B$ et donc $M \geq \sup(A \cup B)$. Pour l'inégalité inverse, par définition $M = \sup A$ ou $M = \sup B$. Faisons une disjonction de cas : si $M = \sup A$ alors $M \geq \sup B$ et il existe une suite $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de A , telle que $\lim_{k \rightarrow +\infty} a_k = \sup A = M$. Cette suite est aussi une suite de $A \cup B$ et elle tend vers M un majorant de $A \cup B$. On a donc que $M = \sup(A \cup B)$ dans ce cas. L'autre possibilité, si $M \neq \sup A$ alors si $M = \sup B$ et par symétrie de l'argument on a $M = \sup(A \cup B)$.
3. Faux. Exemple : $A = \{0\}$ et $B = \{-2\}$ on a $\sup(A \cup B) = \sup(\{0, -2\}) = 0$ alors que $\sup A + \sup B = -2$

Exercice 3 (2 points). Étudier la convergence des suites dont le terme général est donné par

1. $w_n = \sqrt[n]{n}$
2. $t_n = \sin(n\pi/4) + \cos(n\pi/2)$
3. $s_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

Solution:

1. C'est exactement l'exercice 10.i de la feuille 6.
2. $\forall k \in \mathbb{N}^*, u_{4k} = 1$ et $u_{2(2k+1)} = 0$. Donc u_n ne converge pas.

3. $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$ et $2\sqrt{n} \leq \sqrt{n+1} + \sqrt{n} \leq 2\sqrt{n+1}$.
On a donc un encadrement $\frac{1}{2\sqrt{n+1}} \leq \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$ qui nous permet de conclure (par le théorème des gendarmes) que la limite cherchée est 0.

Exercice 4. 1. (1 point) Montrer que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, les deux propositions suivantes sont vraies

- (a) $(y > 0 \text{ et } x > 0) \Rightarrow \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$
 - (b) $(y \geq x > 0) \Rightarrow (x \leq \frac{x+y}{2} \leq y \text{ et } x \leq \sqrt{xy} \leq y)$.
2. (5 points) Soient u_0 et v_0 des réels strictement positifs avec $u_0 < v_0$. On définit deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de la façon suivante :

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

- (a) Montrer que $u_n \leq v_n$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$.
- (b) Montrer que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
- (c) Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
- (d) En déduire qu'il existe des réels u et v tel que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers u et la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers v .
- (e) Montrer que $u = v$. *Indication : Éviter d'utiliser le théorème des suites adjacentes et remarquer quelles relations satisfont u et v .*

Solution:

1. (a) On prend le carré l'égalité est équivalente à $xy \leq \frac{x^2+y^2+2xy}{4} = \frac{(x-y)^2+4xy}{4} = xy + \frac{(x-y)^2}{4}$ qui est vérifiée.
- (b) On additionne x à $(y \geq x > 0)$, avant de diviser par 2 pour obtenir $x \leq \frac{x+y}{2}$. De même, on additionne y à $(y \geq x > 0)$, avant de diviser par 2 pour obtenir $y \geq \frac{x+y}{2}$. Ensuite, on multiplie $(y \geq x > 0)$ par x , avant de prendre la racine pour obtenir $x \leq \sqrt{xy}$ et de même, on multiplie y à $(y \geq x > 0)$, avant de prendre la racine, pour obtenir $\sqrt{xy} \leq y$.
2. (a) Remarquons d'abord que u_n et v_n sont strictement positifs. $u_0 \leq v_0$ et pour tout $n \geq 1$, $\sqrt{u_{n-1}v_{n-1}} = u_n \leq v_n = \frac{u_{n-1}+v_{n-1}}{2}$ découle directement de la question 1.
- (b) $v_{n+1} - v_n = \frac{u_n+v_n}{2} - v_n = \frac{u_n-v_n}{2} \leq 0$
- (c) $u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n v_n} - u_n = \sqrt{u_n}(\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n}) \geq 0$
- (d) (u_n) croissante et majorée $u_n \leq v_0$ et (v_n) décroissante et minorée $v_n \geq u_0$. Elles convergent toutes deux.
- (e) Puisque $u = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1}$ et $v = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_{n+1}$, on a

$$u = \sqrt{uv} \quad \text{et} \quad v = \frac{u+v}{2}$$

L'une ou l'autre de ces égalités impliquent $u = v$.

Exercice 5 (6 points). Soit $n \geq 1$.

1. Montrer que l'équation

$$\sum_{k=1}^n x^k = 1$$

admet une unique solution, que l'on notera a_n , dans $]0, 1]$. *Indication : étudier la fonction $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \sum_{k=1}^n x^k - 1$.*

2. Montrer que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite strictement décroissante. *Indication : quel est le signe de $f_{n+1}(a_n)$?*
3. Montrer que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite minorée par $\frac{1}{2}$ et déduire qu'elle admet une limite $\ell \geq \frac{1}{2}$. *Indication : sommes géométriques*
4. (Bonus + 2pts) Montrer que $\ell = \frac{1}{2}$.

Solution:

1. Pour $n = 1$ l'unique solution est $x = 1$. Pour $n > 1$, la fonction $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \sum_{k=1}^n x^k - 1$ est continue, $f_n(0) = -1 < 0$ et $f_n(1) = n - 1 > 0$. Ainsi, par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x \in [0, 1]$ tel que $f_n(x) = 0$, c'est-à-dire que $\sum_{k=1}^n x^k = 1$. De plus, cette solution est unique puisque f_n est strictement croissante, en effet $\forall x \in [0, 1], f'_n(x) = \sum_{k=1}^n kx^{k-1} > 0$.
2. On calcule $f_n(a_{n-1}) = \sum_{k=1}^n a_{n-1}^k - 1 = \sum_{k=1}^{n-1} a_{n-1}^k + a_{n-1}^n - 1 = f_{n-1}(a_{n-1}) + a_{n-1}^n = a_{n-1}^n$. Puisque $\forall k \in \mathbb{N}^*$, on a, par définition, que $a_k \in [0, 1]$ le calcul précédent nous indique $f_n(a_{n-1}) \geq 0$. Or, $f_n(0) = -1 < 0$ et donc par le théorème des valeurs intermédiaires encore une fois $a_n \in [0, a_{n-1}]$. En particulier, $a_n \leq a_{n-1}$ et la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. Pour montrer la *stricte* décroissance, on peut remarquer que si $a_n = a_{n-1}$, alors le calcul ci-dessus nous indique $0 = f_n(a_n) = f_n(a_{n-1}) = a_{n-1}^n$ et donc $a_n = a_{n-1} = 0$, or $f_n(0) = -1 \neq 0$.
3. Pour $n = 1$, $a_1 = 1 \geq \frac{1}{2}$. On suppose maintenant que $n > 1$. Remarquons que la décroissance stricte démontrée à la question précédente implique que $\forall n > 1, a_n \neq 1$. Par ailleurs, par définition des a_n , on a $\sum_{k=1}^n a_n^k = 1$ et puisque qu'une somme géométrique

$$2 = 1 + \sum_{k=1}^n a_n^k = \frac{1 - a_n^{n+1}}{1 - a_n}.$$

C'est-à-dire $2(1 - a_n) = 1 - a_n^{n+1}$ et donc puisque $a_n^{n+1} > 0$

$$1 = 2a_n - a_n^{n+1} < 2a_n.$$

Ans $\forall n \in \mathbb{N}$, on a $a_n \geq \frac{1}{2}$. Donc $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante et minorée. Elle converge donc une limite $\ell \in \mathbb{R}$. Puisque $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \in]\frac{1}{2}, 1]$, on peut même dire que $\ell \in [\frac{1}{2}, 1[$.

4. (Bonus + 2pts) Montrer que $\ell = \frac{1}{2}$. Soit $n > 1$, on a $\frac{1}{2} \leq \ell < a_n$ et puisque f_n est croissante

$$f_n\left(\frac{1}{2}\right) \leq f_n(\ell) < f_n(a_n).$$

C'est-à-dire

$$f_n\left(\frac{1}{2}\right) = -2 + \frac{1 - (1/2)^{n+1}}{1 - 1/2} = -(1/2)^n \leq f_n(\ell) < 0.$$

Par le théorème des gendarmes, on a donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(\ell) = 0$.

On remarque que $f_n(\ell) = \frac{1-\ell^{n+1}}{1-\ell} - 2$ et $|\ell| < 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(\ell) = \frac{1}{1-\ell} - 2 = \frac{1-2(1-\ell)}{1-\ell} = \frac{-1+2\ell}{1-\ell}$. Finalement, $-1 + 2\ell = 0$ si et seulement si $\ell = \frac{1}{2}$.