Université Claude Bernard - Lyon 1 — Semestre d'Automne 2024-2025

Cursus préparatoire : Analyse 1 et Algèbre 1 — 20 novembre 2024

Devoir surveillé N°3

Durée : 1h30

Le candidat ou la candidate attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Dans toutes les questions, il sera tenu le plus grand compte de la rigueur de la rédaction ; **toute réponse insuffisamment justifiée sera considérée comme nulle.** *Calculatrices et notes de cours sont interdites. Le sujet est* ***recto-verso****. Le barème indiqué est approximatif.*

Exercice 1 (6 points)**.** Soit $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par

$$\begin{cases} b_0 = \frac{3}{2} \\ b_{n+1} = b_n^2 - 2b_n + 2 \end{cases} \tag{1}$$

1. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq b_n \leq 2$. *Indication : considérer* $b_{n+1} - 1$
2. Démontrer que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
3. En déduire que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$.
4. Justifier que $\ell = \ell^2 - 2\ell + 2$ et déterminer la limite ℓ.

Exercice 2 (2 points)**.** Soit A et B deux parties non-vides et bornées de $\mathbb{R}$.
Vrai ou **faux** ? (Attention les points seront accordés pour la justification seulement !)

1. $A \subseteq B \Rightarrow \sup A \leqslant \sup B$,
2. $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$,
3. $\sup A + \sup B = \sup(A \cup B)$.

Exercice 3 (2 points)**.** Étudier la convergence des suites dont le terme général est donné par

1. $w_n = \sqrt[n]{n}$
2. $t_n = \sin(n\pi/4) + \cos(n\pi/2)$
3. $s_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

Exercice 4.

1. (1 point) Montrer que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, les deux propositions suivantes sont vraies
   (a) $(y > 0 \text{ et } x > 0) \Rightarrow \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$
   (b) $(y \geq x > 0) \Rightarrow \left(x \leq \frac{x+y}{2} \leq y \text{ et } x \leq \sqrt{xy} \leq y\right)$.
2. (5 points) Soient u_0 et v_0 des réels strictement positifs avec $u_0 < v_0$. On définit deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la façon suivante :

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

(a) Montrer que $u_n \leq v_n$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

(b) Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

(c) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

(d) En déduire qu'il existe des réels u et v tel que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers u et la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers v.

(e) Montrer que $u = v$. *Indication : Éviter d'utiliser le théorème des suites adjacentes et remarquer quelles relations satisfont u et v.*

Exercice 5 (6 points)**.** Soit $n \geq 1$.

1. Montrer que l'équation
$$\sum_{k=1}^{n} x^k = 1$$
admet une unique solution, que l'on notera a_n, dans $]0,1]$. *Indication : étudier la fonction* $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ *définie par* $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x^k - 1$.
2. Montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite strictement décroissante. *Indication : quel est le signe de* $f_{n+1}(a_n)$ *?*
3. Montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite minorée par $\frac{1}{2}$ et déduire qu'elle admet une limite $\ell \geq \frac{1}{2}$. *Indication : sommes géométriques*
4. (Bonus + 2pts) Montrer que $\ell = \frac{1}{2}$.