Université Claude Bernard Lyon 1 Semestre d'automne 2024-2025
Cursus prépa - Première année

Mathématiques - DS n°2 CUPGE

Documents et calculettes interdits
Corrigé

Exercice 1 : Logique.

1. Soient P, Q et R trois propositions. Est-ce que les deuxc propositions sont équivalentes :
$$(P \to Q) \to (P \to R) \qquad \text{et} \qquad P \to (Q \to R)\ ?$$
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction réelle. Écrire en langage formel les propositions suivantes :
   (a) f s'annule au plus une fois.
   (b) f s'annule une seule fois.
   (c) f prend des valeurs arbitrairmenet grands.
   Ensuite écrire les négations de ces énoncés.

Solution.

1.

P	Q	R	$P \to Q$	$P \to R$	$(P \to Q) \to (P \to R)$	$Q \to R$	$P \to (Q \to R)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	F
V	F	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	F	V	V	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	V	V	F	V
F	F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V

La 6me et la dernière colonne sont égales. les deux propositions sont donc équivalentes.

2. (a) $\forall x \forall y\, (f(x) = f(y) = 0 \to x = y)$.
   (b) $\exists x (f(x) = 0 \land \forall y\, (f(y) = 0 \to x = y))$.
   (c) $\forall y \exists x\, f(x) > y$.
   Négations :
   (a) $\exists x \exists y\, (x \neq y \land f(x) = f(y) = 0)$.
   (b) $\forall x\, (f(x) \neq 0 \lor \exists y\, (f(y) = 0 \land x \neq y))$.
   (c) $\exists y \forall x\, f(x) \leq y$.

Exercice 2 : Ensembles.

1. Soient X et Y deux ensembles. Montrer que
   (a) $\mathcal{P}(X) \cup \mathcal{P}(Y) \subseteq \mathcal{P}(X \cup Y)$.
   (b) $\mathcal{P}(X) \cap \mathcal{P}(Y) \subseteq \mathcal{P}(X \cap Y)$.
   (c) $\mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(Y) \subseteq \mathcal{P}(X \times Y)$. Dans les trois cas, y a-y-il égalité ?
2. Soient $k, n \in \mathbb{N}^{\times}$.
   (a) Combien existe-t-il d'applications strictement croissantes de $[\![1, k]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$?
   (b) En déduire le nombre d'uplets $(x_1, \dots, x_k)$ d'entiers tels que $1 \leq x_1 < x_2 < \dots < x_k \leq n$.
   (c) En déduire le nombre d'uplets $(x_1, \dots, x_k)$ d'entiers > 0 tels que $x_1 + x_2 + \dots + x_k \leq n$.
   (d) En déduire le nombre d'uplets $(x_1, \dots, x_k)$ d'entiers > 0 tels que $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$.

Solution.

1. (a) Soit $Z \in \mathcal{P}(X) \cup \mathcal{P}(Y)$. Donc $Z \in \mathcal{P}(X)$ ou $Z \in \mathcal{P}(Y)$, c'est-à-dire $Z \subseteq X$ ou $Z \subseteq Y$. Dans les deux cas $Z \subseteq X \cup Y$, d'où $Z \in \mathcal{P}(X \cup Y)$. Ceci montre $\mathcal{P}(X) \cup \mathcal{P}(Y) \subseteq \mathcal{P}(X \cup Y)$.
   (b) Soit $Z \in \mathcal{P}(X) \cap \mathcal{P}(Y)$. Donc $Z \in \mathcal{P}(X)$ et $Z \in \mathcal{P}(Y)$, c'est-à-dire $Z \subseteq X$ et $Z \subseteq Y$. Donc pour tout $x \in Z$ on a $x \in X$ et $x \in Y$, d'où $x \in X \cap Y$. Alors $Z \subseteq X \cap Y$, d'où $Z \in \mathcal{P}(X \cap Y)$. Ceci montre $\mathcal{P}(X) \cup \mathcal{P}(Y) \subseteq \mathcal{P}(X \cup Y)$.
   (c) C'est faux. Si $Z \in \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(Y)$, il y a $A \in \mathcal{P}(X)$ et $B \in \mathcal{P}(Y)$ avec $Z = (A, B)$; donc c'est un couple. Par contre, un élément $Z' \in \mathcal{P}(X \times Y)$ est une partie $Z' \subseteq X \times Y$, c'est-à-dire un ensemble.

   Si $X = \{a\}$ et $Y = \{b\}$ avec $a \neq b$ alors $Z = \{a, b\} \in \mathcal{P}(X \cup Y)$, mais $Z \not\subseteq X$ ni $Z \subseteq Y$. Donc la réciproque est fausse.
   Si $Z \subseteq X \cap Y$, alors $Z \subseteq X$ et $Z \subseteq Y$, donc la réciproqui de (b) est vraie.
   La réciproque de (c) est fausse pour la même raison : à gauche il y a des couples, à droite des ensembles.
2. La réponse à toutes les questions est 0 si $k > n$. On suppose donc $k \leq n$.
   (a) Toute k-combinaison $\{\ell_1, \dots, \ell_k\}$ de $[\![1, n]\!]$ me donne une fonction f strictement croissante en posant $f(i) = \ell_i$ (où on a mis les ℓ_i dans l'ordre croissante). Réciproquement, si f est une fonction strictement croissante, alors $\mathrm{im}\,(f)$ est une k-combinaison. Les deux opérations sont réciproques l'un à l'autre. Il y a donc autant de fonctions croissantes que de k-combinaisons, soit $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$.
   (b) On pose $f(i) = x_i$. Ceci donne une bijection entre les fonctions strictement croissantes de $[\![1, k]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$ et les uplets $(x_1, \dots, x_k)$ d'entiers tels que $1 \leq x_1 < x_2 < \cdots < x_k \leq n$. Il y en a donc $\binom{n}{k}$.
   (c) On pose $y_i = \sum_{j=1}^{i} x_i$. Ceci donne une bijection entre les uplets $(y_1, \dots, y_k)$ d'entiers tels que $1 \leq y_1 < y_2 < \cdots < y_k \leq n$, et les uplets $(x_1, \dots, x_k)$ d'entiers > 0 tels que $x_1 + x_2 + \cdots + x_k \leq n$. Il y en a donc $\binom{n}{k}$.
   (d) Il y en a $\binom{n}{k} - \binom{n-1}{k} = \frac{n! - (n-k)(n-1)!}{k!\,(n-k)!} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} = \binom{n-1}{k-1}$.

Exercice 3 : Applications.

1. Soit E un ensemble et $A, B \in \mathcal{P}(E)$. On considère l'application $f : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ donnée par $f(X) = (X \cap A, X \cap B)$.
   (a) Montrer que f est injective si et seulement si $A \cup B = E$.
   (b) Montrer que f est surjective si et seulement si $A \cap B = \emptyset$.
2. Soient $f : X \to Y$ et $g : Y \to X$ deux applications tels que $f \circ g \circ f$ est bijective. Montrer que f et g sont bijectives.

Solution.

1. Soit $x \in E \setminus (A \cup B)$. On pose $X = \emptyset$ et $X' = \{x\}$. Alors $f(X) = f(X') = (\emptyset, \emptyset)$. Donc $E \neq A \cup B$ implique f non-injective ; par contraposée f injective implique $A \cup B = E$.
   Réciproquement, supposons $E = A \cup B$. Soient $X \neq X'$ deux parties de E. Alors soit il a $x \in X \setminus X'$, soit il y a $x' \in X' \setminus X$; par symétrie on peut supposer qu'on est dans le premier cas. Si $x \in A$ alors $x \in X \cap A$ mais $x \notin X' \cap A$; si $x \in B$ alors $x \in X \cap B$ mais $x \notin X' \cap B$. Dans les deux cas $f(x) \neq f(X')$. Ceci montre que f est bien injective.
2. Soit $x \in A \cap B$. Alors pour tout $X \subset E$, soit $x \in X$ et on a $x \in X \cap A$ et $x \in X \cap B$, soit $x \notin X$ et on a $x \notin X \cap A$ et $x \notin X \cap B$. Ainsi $(\emptyset, \{x\}) \notin \mathrm{im}\,(f)$, et f n'est pas surjective. Par contraposée, f surjective implique $A \cap B = \emptyset$.
   Réciproquement, soit $A \cap B = \emptyset$. Si $A' \subseteq A$ et $B' \subseteq B$, alors pour $X = A' \cup B'$ on a $f(X) = (A', B')$. Ceci montre que f est surjective.
3. $f \circ (g \circ f)$ surjective implique f surjective, et $(f \circ g) \circ f$ injective implique f injective. Donc f est bijective, et $g = f^{-1} \circ (f \circ g \circ f) \circ f^{-1}$ aussi.

Exercice 4 : Étude de fonctions

On considère la fonction réelle

$$f : x \mapsto \frac{\ln(x^2-4)}{\sqrt{4x^2-2x+1}}.$$

1. Donner le domaine de définition maximal.
2. Étudier la parité et la périodicité de f.
3. Étudier les éventuelles limites de f aux bornes de son domaine maximal.
4. Calculer la fonction dérivée de f.
5. Donner le tableau de variations de f.
6. Calculer ses asymptôtes éventuelles.
7. Dresser le graphe de f.

Solution.

1. Pour que le ln soit défini il faut $x^2 > 4$, donc $|x| > 2$. Pour que la racine soit définie et non-zéro, il faut $0 < 4x^2 - 2x + 1 = (2x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$. Ceci est toujours le cas. Ainsi le domaine maximal est $D = \mathbb{R} \setminus [-2, 2] =]-\infty, 2[\cup]2, \infty[$.
2. $f(3) = \frac{\ln 5}{\sqrt{31}}$ mais $f(-3) = \frac{\ln 5}{\sqrt{43}}$. Donc f est ni paire ni impaire.
   $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ (voir 3.), mais f n'est pas constante zéro. Donc f n'est pas périodique.
3. Par croissance comparée,

   $$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\ln(x^2-4)}{\sqrt{4x^2-2x+1}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2\ln|x| + \ln(1-\frac{4}{x^2})}{|x|\sqrt{4-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2\ln|x|}{|x|\ 2} = 0$$

   On a $\lim_{x\to 2}\sqrt{4x^2-2x+1} = \sqrt{13}$, et $\lim_{x\to -2}\sqrt{4x^2-2x+1} = \sqrt{21}$.
   Par contre, $\lim_{x\to\pm 2}\ln(x^2-4) = \lim_{y\to 0^+}\ln y = -\infty$. Donc $\lim_{x\to\pm 2} f(x) = -\infty$.
4. On a

   $$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\frac{2x}{x^2-4}\sqrt{4x^2-2x+1} - \ln(x^2-4)\frac{8x-2}{2\sqrt{4x^2-2x+1}}}{4x^2-2x+1} \\ &= \frac{2x(4x^2-2x+1) - (x^2-4)(4x-1)\ln(x^2-4)}{(x^2-4)(4x^2-2x+1)^2}\sqrt{4x^2-2x+1} \\ &= \frac{(8x^3-4x^2+2x) - (4x^3-x^2-16x+4)\ln(x^2-4)}{(x^2-4)(4x^2-2x+1)^2}\sqrt{4x^2-2x+1} \end{aligned}$$

5. Pour $|x| > 2$ on a

   $$\frac{\sqrt{4x^2-2x+1}}{(x^2-4)(4x^2-2x+1)^2} > 0.$$

   Le signe de f' est donc celui de

   $$(8x^3-4x^2+2x) - (4x^3-x^2-16x+4)\ln(x^2-4) = 2x(4x^2-2x+1) - (x^2-4)(4x-1)\ln(x^2-4).$$

   Puisque $\lim_{x\to\pm 2}(x^2-4)\ln(x^2-4) = \lim_{y\to 0^+} y\ln y = 0$, ce signe est $-$ quand $x \to -2^-$, et $+$ quand $x \to 2^+$.
   Il est $+$ quand $x \to -\infty$ et $-$ quand $x \to \infty$ (croissance comparée).
   f a deux zéros à $\pm\sqrt{5}$.
   Les signe de $f'(\pm\sqrt{5})$ est celui de $\pm\sqrt{5}$, puisque $4x^2 - 2x + 1 > 0$.
   On ne va pas détailler plus le comportement de f'.

x	$-\infty$				$-\sqrt{5}$		-2		2		$\sqrt{5}$				∞
$f'(x)$		$+$	0		$-$			$\Vert$			$+$		0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$	$\Vert$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

6. En vue de 3. il y a une asymptôte horizontale $y = 0$ à $\pm\infty$ et deux asymptôtes verticales $x = \pm 2$.