Université Claude Bernard Lyon 1 Semestre d'automne 2024-2025
Cursus prépa - Première année

Mathématiques - DS n°2 CUPGE

Documents et calculettes interdits

Exercice 1 : Logique.

1. Soient P, Q et R trois propositions. Est-ce que les deuxc propositions sont équivalentes :

$$(P \to Q) \to (P \to R) \qquad \text{et} \qquad P \to (Q \to R)\ ?$$

2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction réelle. Écrire en langage formel les propositions suivantes :
   (a) f s'annule au plus une fois.
   (b) f s'annule une seule fois.
   (c) f prend des valeurs arbitrairement grands.
   Ensuite écrire les négations de ces énoncés.

Exercice 2 : Ensembles.

1. Soient X et Y deux ensembles. Montrer que
   (a) $\mathcal{P}(X) \cup \mathcal{P}(Y) \subseteq \mathcal{P}(X \cup Y)$.
   (b) $\mathcal{P}(X) \cap \mathcal{P}(Y) \subseteq \mathcal{P}(X \cap Y)$.
   (c) $\mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(Y) \subseteq \mathcal{P}(X \times Y)$. Dans les trois cas, y a-y-il égalité ?
2. Soient $k, n \in \mathbb{N}^{\times}$.
   (a) Combien existe-t-il d'applications strictement croissantes de $[\![1, k]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$?
   (b) En déduire le nombre d'uplets $(x_1, \ldots, x_k)$ d'entiers tels que $1 \leq x_1 < x_2 < \cdots < x_k \leq n$.
   (c) En déduire le nombre d'uplets $(x_1, \ldots, x_k)$ d'entiers > 0 tels que $x_1 + x_2 + \cdots + x_k \leq n$.
   (d) En déduire le nombre d'uplets $(x_1, \ldots, x_k)$ d'entiers > 0 tels que $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$.

Exercice 3 : Applications.

1. Soit E un ensemble et $A, B \in \mathcal{P}(E)$. On considère l'application $f : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ donnée par $f(X) = (X \cap A, X \cap B)$.
   (a) Montrer que f est injective si et seulement si $A \cup B = E$.
   (b) Montrer que f est surjective si et seulement si $A \cap B = \emptyset$.
2. Soient $f : X \to Y$ et $g : Y \to X$ deux applications tels que $f \circ g \circ f$ est bijective. Montrer que f et g sont bijectives.

Exercice 4 : Étude de fonctions

On considère la fonction réelle

$$f : x \mapsto \frac{\ln(x^2 - 4)}{\sqrt{4x^2 - 2x + 1}}.$$

1. Donner le domaine de définition maximal.
2. Étudier la parité et la périodicité de f.
3. Étudier les éventuelles limites de f aux bornes de son domaine maximal.
4. Calculer la fonction dérivée de f.
5. Donner le tableau de variations de f.
6. Calculer ses asymptôtes éventuelles.
7. Dresser le graphe de f.