Devoir surveillé N°2

Durée : 1h30

Le candidat ou la candidate attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Dans toutes les questions, il sera tenu le plus grand compte de la rigueur de la rédaction ; **toute réponse insuffisamment justifiée sera considérée comme nulle.** Calculatrices et notes de cours sont interdites. Le sujet est **recto-verso**. Le barème indiqué est approximatif.

Exercice 1 (5 points). Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{*+}$ la fonction définie par

$$f(x) = \frac{e^x + 2}{e^{-x} + 1}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1. Montrez que f est bijective.
2. On fixe $y \in \mathbb{R}^{*+}$. Déterminez $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = y$, puis en déduire la fonction réciproque de f .
3. Etudiez les variations de la fonction $f \circ \sin$ restreinte à l'intervalle $[0, 2\pi]$.

Solution:

1. (2 pts). On étudie les variations de f . La fonction f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a (en utilisant la formule $(u/v)' = (u'v - uv')/v^2$)

$$f'(x) = \frac{e^x(e^{-x} + 1) + (e^x + 2)e^{-x}}{(e^{-x} + 1)^2} = \frac{2 + e^x + 2e^{-x}}{(e^{-x} + 1)^2} > 0.$$

La fonction f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$, en particulier injective. Par ailleurs, puisque e^x (resp. e^{-x} tend vers $+\infty$ (resp. 0) quand x tend vers l'infini, on a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 2}{e^{-x} + 1} = +\infty.$$

De manière similaire, on trouve

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + 2}{e^{-x} + 1} = \frac{2}{+\infty} = 0.$$

Puisque f est continue, le théorème des valeurs intermédiaires assure que l'image de f contient $]0, +\infty[$, c'est-à-dire f est surjective (donc bijective).

2. (2 pts). D'après la question 1. il existe un unique réel x tel que $f(x) = y$. Posons $X = e^x$. Alors

$$\begin{aligned}f(x) = y &\iff \frac{X + 2}{1/X + 1} = \frac{X^2 + 2X}{1 + X} = y \\ &\iff X^2 + 2X = y(1 + X) \\ &\iff X^2 + (2 - y)X - y = 0.\end{aligned}$$

Comme $y > 0$, le discriminant $(2 - y)^2 + 4y$ est strictement positif et on a deux racines réelles. On a donc

$$X = \frac{y - 2 \pm \sqrt{(2 - y)^2 + 4y}}{2}.$$

Remarquons que $X = e^x > 0$ et que $\sqrt{(2 - y)^2 + 4y} > \sqrt{(2 - y)^2} = |2 - y|$. Donc la plus petite racine ci-dessus est négative, l'autre est (strictement) positive. On en déduit que

$$e^x = X = \frac{y - 2 + \sqrt{(2 - y)^2 + 4y}}{2} = \frac{y}{2} - 1 + \frac{1}{2}\sqrt{y^2 + 4}.$$

Donc

$$x = \ln\left(\frac{y}{2} - 1 + \frac{1}{2}\sqrt{y^2 + 4}\right).$$

Finalement, pour tout $y \in \mathbb{R}^{*+}$, on a

$$f^{-1}(y) = \ln\left(\frac{y}{2} - 1 + \frac{1}{2}\sqrt{y^2 + 4}\right).$$

3. (1 pts) On utilise la formule de la dérivée d'une composition $(u \circ v)' = (u' \circ v) \times v'$. On trouve pour tout $x \in \mathbb{R}$, en posant $g(x) = f \circ \sin(x)$,

$$g'(x) = f'(\sin(x)) \cos(x).$$

On a vu à la question 1. que $f' > 0$, donc $g'(x)$ a le même signe que $\cos(x)$, donc positif sur $[0, \pi/2]$ et $[3\pi/2, 2\pi]$, négatif sur $[\pi/2, 3\pi/2]$. On a déduit que la fonction g est croissante sur $[0, \pi/2]$ et $[3\pi/2, 2\pi]$ et décroissante sur $[\pi/2, 3\pi/2]$.

Exercice 2 (2 points). Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la fonction définie par

$$f(x, y) = (x + y, xy)$$

pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

1. L'application f est-elle injective ?
2. L'application f est-elle surjective ?

Solution:

- (0.5 pt). Non. On a $f(x, 0) = f(0, x) = (x, 0)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Par exemple $f(1, 0) = f(0, 1)$ mais $(0, 1) \neq (1, 0)$.
- (1.5 pts). Non. Soit $(s, p) \in \mathbb{R}^2$ et cherchons $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x + y = s$ et $xy = p$. On s'aperçoit que x et y doivent être racines du polynôme

$$X^2 - sX + p.$$

Or, ce polynôme n'a pas de racines réelles dès que son discriminant $\Delta = s^2 - 4p$ est négatif. Prenons par exemple $s = 0$ et $p = 1$. Alors il n'y a pas de couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x + y = 0$ (cela impose $y = -x$) et $xy = -x^2 = 1$.

Exercice 3 (4 points). Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses (en justifiant) et donner leur négation.

- $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y \geq 0$.
- $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y \geq 0$.
- $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, (x \leq y \Rightarrow x \leq 0)$.
- $\forall x \in \mathbb{R}, (\forall y > 0, x \leq y) \Rightarrow x \leq 0$.
- $\forall f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \forall g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, (f \circ g \text{ injective}) \Rightarrow g \text{ injective}$.

Solution:

- (0.5 pt). Vrai. Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose (par exemple) $y = -x$. Alors $x + y = x - x = 0 \geq 0$.
Négation : $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y < 0$.
- (0.5 pt). Faux. Soit $x \in \mathbb{R}$. On prend $y = -x - 1 \in \mathbb{R}$. Alors $x + y = -1 < 0$ (on peut aussi prendre un contre-exemple explicite comme $x = 0$ et $y = -1$).
Négation : $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y < 0$.
- (1 pt). Vrai. Il suffit de choisir $x \leq 0$ (par exemple $x = 0$), puisque que l'implication $P \Rightarrow Q$ est vraie dès que Q est vraie.
Négation : $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, (x \leq y \text{ et } x > 0)$.
- (1 pt). Vrai. Par l'absurde, supposons qu'il existe $x > 0$ tel que $\forall y > 0, x \leq y$. On choisit $y = x/2$. Alors $y > 0$, mais pourtant $y < x$: contradiction.
Négation : $\exists x \in \mathbb{R}, (\forall y > 0, x \leq y) \text{ et } x > 0$.
- (1 pt). Vrai. Supposons $f \circ g$ injective. Soient $x, x' \in \mathbb{R}$ tels que $g(x) = g(x')$. En composant avec f , on trouve $f \circ g(x) = f \circ g(x')$. Comme $f \circ g$ est injective, nécessairement $x = x'$. Donc g est injective.
Négation : $\exists f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \exists g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f \circ g \text{ injective et } g \text{ pas injective}$.

Exercice 4 (8 points). Soit E un ensemble. Etant donnés deux ensembles $A, B \subseteq E$, on définit la *différence symétrique* $A\Delta B$ de A et de B par la formule

$$A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Remarquez que par définition, on a $A\Delta B \subseteq A \cup B$ et $A\Delta B = B\Delta A$.

1. On suppose pour cette question uniquement que $E = \mathbb{R}$. Calculez $A\Delta B$ lorsque $A = [-1, 1]$ et $B = [0, 2]$. On donnera la solution sous la forme d'une union d'intervalles.

Soient A, B, C trois sous-ensembles quelconques de E .

2. Calculez $A\Delta\emptyset$, $A\Delta A$ et $A\Delta E$.
3. Montrez que $A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. *Indication : on pourra procéder par double inclusion.*
4. Supposons $A\Delta B = A\Delta C$. Montrez que pour tout $x \in B$, on a $x \in C$. *Indication : on pourra distinguer les cas $x \in A$ et $x \notin A$.*
5. Dédurre de la question précédente que $A\Delta B = A\Delta C$ si et seulement si $B = C$.
6. Trouver toutes les parties $X \in \mathcal{P}(E)$ telles que $A\Delta X = \emptyset$.

Solution:

1. (0.5 pt). On trouve $A\Delta B = ([-1, 1] \cup [0, 2]) \setminus ([-1, 1] \cap [0, 2]) = [-1, 2] \setminus [0, 1] = [-1, 0[\cup]1, 2]$.

2. (1.5 pts). On a

$$\begin{aligned} A\Delta\emptyset &= (A \cup \emptyset) \setminus (A \cap \emptyset) = A \setminus \emptyset = A, \\ A\Delta A &= (A \cup A) \setminus (A \cap A) = A \setminus A = \emptyset, \\ A\Delta E &= (A \cup E) \setminus (A \cap E) = E \setminus A = \bar{A}. \end{aligned}$$

3. (2pts). **Première méthode (double inclusion).** Montrons que $A\Delta B \subseteq (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Soit $x \in A\Delta B$. Alors $x \in A \cup B$, donc $x \in A$ ou $x \in B$. On distingue deux cas. Supposons que $x \in A$. Alors comme $x \notin A \cap B$, on a $x \notin B$. Donc $x \in A \setminus B$. De manière symétrique, si on suppose $x \in B$, on trouve $x \in B \setminus A$. Donc on a bien $x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Montrons maintenant $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) \subseteq A\Delta B$. Soit $x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Alors $x \in A \setminus B$ ou $x \in B \setminus A$. Dans les deux cas on a $x \in A \cup B$. Par ailleurs, si on suppose $x \in A \setminus B$, on a $x \notin A \cap B$. De même, si $x \in B \setminus A$, on a $x \notin A \cap B$. Donc $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B) = A\Delta B$.

Deuxième méthode (directe). On a

$$A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \cup B) \cap (\overline{A \cap B}) = (A \cup B) \cap (\bar{A} \cup \bar{B}).$$

D'un autre côté, on a

$$\begin{aligned}(A \cup B) \cap (\bar{A} \cup \bar{B}) &= (A \cap (\bar{A} \cup \bar{B})) \cup (B \cap (\bar{A} \cup \bar{B})) \\ &= ((A \cap \bar{A}) \cup (A \cap \bar{B})) \cup ((B \cap \bar{A}) \cup (B \cap \bar{B})).\end{aligned}$$

Comme $A \cap \bar{A} = B \cap \bar{B} = \emptyset$, on trouve finalement

$$A \Delta B = (A \cap \bar{B}) \cup ((B \cap \bar{A}) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

4. (2 pts). Soit $x \in B$. Supposons d'abord que $x \notin A$. Alors $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B) = A \Delta B = A \Delta C$, donc $x \in A \cup C$. Comme $x \notin A$, on a nécessairement $x \in C$.
Supposons maintenant $x \in A$. Alors $x \in A \cap B$, donc $x \notin A \Delta B = A \Delta C$. On en déduit que $x \notin A \Delta C$. Or $x \in A \subseteq A \cup C$, donc $x \in A \cap C$. En particulier $x \in C$.
5. (1 pt). Si $B = C$, on a trivialement $A \Delta B = A \Delta C$. Supposons maintenant $A \Delta B = A \Delta C$. La question précédente assure que $B \subseteq C$. Comme B et C jouent un rôle symétrique, on a aussi $C \subseteq B$, donc $B = C$.
6. (1 pts) **Première méthode.** D'après la question précédente, si $A \Delta X = \emptyset = A \Delta Y$ pour deux parties $X, Y \in \mathcal{P}(E)$, alors $X = Y$. Donc l'équation a au plus une solution. La question 2 nous donne $A \Delta A = \emptyset$, donc l'équation $A \Delta X = \emptyset$ a pour unique solution l'ensemble $X = A$.

Deuxième méthode. D'après la question 3., l'équation $A \Delta X = \emptyset$ est équivalente à $A \setminus X \cup X \setminus A = \emptyset$, ce qui est possible si et seulement si $X \setminus A = A \setminus X = \emptyset$. Or, $X \setminus A = \emptyset$ si et seulement si $X \subseteq A$, et de manière similaire $A \setminus X = \emptyset$ si et seulement si $A \subseteq X$, d'où $X = A$.

Exercice 5 (4 points). Soient E et F deux ensembles et $f : E \rightarrow F$. Soient $A, B \in \mathcal{P}(F)$.

1. Montrez que $f^{-1}[A \cup B] = f^{-1}[A] \cup f^{-1}[B]$ et $f^{-1}[A \cap B] = f^{-1}[A] \cap f^{-1}[B]$.
2. Montrez que $f^{-1}[A \setminus B] = f^{-1}[A] \setminus f^{-1}[B]$.
3. Montrez que $f^{-1}[A \Delta B] = (f^{-1}[A]) \Delta (f^{-1}[B])$, où l'opérateur différence symétrique Δ est défini comme à l'exercice 4.

Solution:

1. (1 pt) Fait en TD. Exemple de rédaction pour la première égalité : soit $x \in E$. Alors

$$\begin{aligned}x \in f^{-1}[A \cup B] &\Leftrightarrow f(x) \in A \cup B \Leftrightarrow f(x) \in A \text{ ou } f(x) \in B \\ &\Leftrightarrow x \in f^{-1}[A] \text{ ou } x \in f^{-1}[B] \\ &\Leftrightarrow x \in f^{-1}[A] \cup f^{-1}[B],\end{aligned}$$

d'où $f^{-1}[A \cup B] = f^{-1}[A] \cup f^{-1}[B]$.

2. (1 pt) Soit $x \in E$. On a les équivalences

$$x \in f^{-1}[A \setminus B] \Leftrightarrow f(x) \in A \text{ et } f(x) \notin B \Leftrightarrow x \in f^{-1}[A] \text{ et } x \notin f^{-1}[B] \Leftrightarrow x \in f^{-1}[A] \setminus f^{-1}[B].$$

3. (1 pt) En combinant les questions précédentes, on trouve

$$\begin{aligned} f^{-1}[A \Delta B] &= f^{-1}[(A \cup B) \setminus (A \cap B)] = f^{-1}[A \cup B] \setminus f^{-1}[A \cap B] \\ &= (f^{-1}[A] \cup f^{-1}[B]) \setminus (f^{-1}[A] \cap f^{-1}[B]) \\ &= (f^{-1}[A]) \Delta (f^{-1}[B]). \end{aligned}$$