Université Claude Bernard - Lyon 1 — Semestre d'Automne 2024-2025

Cursus préparatoire : Analyse 1 et Algèbre 1 — 23 Octobre 2024

Devoir surveillé N°2

Durée : 1h30

Le candidat ou la candidate attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Dans toutes les questions, il sera tenu le plus grand compte de la rigueur de la rédaction ; **toute réponse insuffisamment justifiée sera considérée comme nulle.** *Calculatrices et notes de cours sont interdites. Le sujet est* ***recto-verso****. Le barème indiqué est approximatif.*

Exercice 1 (5 points)**.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{*+}$ la fonction définie par

$$f(x) = \frac{e^x + 2}{e^{-x} + 1}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1. Montrez que f est bijective.
2. On fixe $y \in \mathbb{R}^{*+}$. Déterminez $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = y$, puis en déduire la fonction réciproque de f.
3. Etudiez les variations de la fonction $f \circ \sin$ restreinte à l'intervalle $[0, 2\pi]$.

Exercice 2 (2 points)**.** Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la fonction définie par

$$f(x, y) = (x + y, xy)$$

pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

1. L'application f est-elle injective ?
2. L'application f est-elle surjective ?

Exercice 3 (4 points)**.** Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses (en justifiant) et donner leur négation.

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y \geq 0.$
2. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y \geq 0.$
3. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, (x \leq y \Rightarrow x \leq 0).$
4. $\forall x \in \mathbb{R}, (\forall y > 0, x \leq y) \Rightarrow x \leq 0.$
5. $\forall f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \forall g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (f \circ g \text{ injective }) \Rightarrow g \text{ injective}.$

Exercice 4 (8 points)**.** Soit E un ensemble. Etant donnés deux ensembles $A, B \subseteq E$, on définit la *différence symétrique* $A \Delta B$ de A et de B par la formule

$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Remarquez que par définition, on a $A \Delta B \subseteq A \cup B$ et $A \Delta B = B \Delta A$.

1. On suppose pour cette question uniquement que $E = \mathbb{R}$. Calculez $A \Delta B$ lorsque $A = [-1, 1]$ et $B = [0, 2]$. On donnera la solution sous la forme d'une union d'intervalles.

Soient A, B, C trois sous-ensembles quelconques de E.

2. Calculez $A \Delta \emptyset$, $A \Delta A$ et $A \Delta E$.
3. Montrez que $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. *Indication : on pourra procéder par double inclusion.*
4. Supposons $A \Delta B = A \Delta C$. Montrez que pour tout $x \in B$, on a $x \in C$ *Indication : on pourra distinguer les cas $x \in A$ et $x \notin A$.*
5. Déduire de la question précédente que $A \Delta B = A \Delta C$ si et seulement si $B = C$.
6. Trouver toutes les parties $X \in \mathcal{P}(E)$ telles que $A \Delta X = \emptyset$.

Exercice 5 (4 points)**.** Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$. Soient $A, B \in \mathcal{P}(F)$.

1. Montrez que $f^{-1}[A \cup B] = f^{-1}[A] \cup f^{-1}[B]$ et $f^{-1}[A \cap B] = f^{-1}[A] \cap f^{-1}[B]$.
2. Montrez que $f^{-1}[A \setminus B] = f^{-1}[A] \setminus f^{-1}[B]$.
3. Montrez que $f^{-1}[A \Delta B] = \big(f^{-1}[A]\big) \Delta \big(f^{-1}[B]\big)$, où l'opérateur différence symétrique Δ est défini comme à l'exercice 4.