Université Claude Bernard Lyon 1 Semestre d'automne 2022-2023
Cursus prépa - Première année

Mathématiques - DS n°1 CUPGE
Documents et calculettes interdits

Exercice 1 : Récurrence.

1. Évaluer

$$a)\quad \sum_{1\le i\le j\le n} i \qquad\qquad b)\quad \sum_{1\le i\le j\le n} j.$$

2. Montrer que pour tout réel $a>0$ on a $a+\frac{1}{a}\ge 2$.
3. En déduire que pour tous réels $a_1,\dots,a_n>0$ et tout entier $n\ge 1$ on a

$$\Big(\sum_{i=1}^n a_i\Big)\ \Big(\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}\Big)\ge n^2.$$

On rappelle que $\sum_{i=1}^n i=\frac{n\,(n+1)}{2}$ et $\sum_{i=0}^n i^2=\frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}$.

Solution.

1. a) On a

$$\sum_{1\le i\le j\le n} i=\sum_{i=1}^n\sum_{j=i}^n i=\sum_{i=1}^n i\sum_{j=i}^n 1=\sum_{i=1}^n i\,(n+1-i)=\sum_{i=1}^n (n+1)\,i-i^2=(n+1)\sum_{i=1}^n i-\sum_{i=1}^n i^2$$
$$=(n+1)\frac{n\,(n+1)}{2}-\frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}=\frac{n\,(n+1)}{6}\,[3\,(n+1)-(2n+1)]=\frac{n\,(n+1)\,(n+2)}{6}.$$

b) On a

$$\sum_{1\le i\le j\le n} j=\sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^j j=\sum_{j=1}^n j\sum_{i=1}^j 1=\sum_{j=1}^n j\,j=\frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}.$$

2. Puisque $a>0$ il y a $b>0$ avec $b^2=a$. Alors $0\le (b-\frac{1}{b})^2=b^2-2+\frac{1}{b^2}=a-2+\frac{1}{a}$, d'où $a+\frac{1}{a}\ge 2$.
Alternative. $0\le (a-1)^2=a^2-2a+1$, d'où $2a\le a^2+1$ et donc $2\le a+\frac{1}{a}$ puisque $a>0$.
3. Par récurrence sur n. Initialisation : Pour $n=1$ on a $\left(\sum_{i=1}^1 a_i\right)\left(\sum_{i=1}^1 \frac{1}{a_i}\right)=a_1\,\frac{1}{a_1}=1\ge 1^2$.
Hypothèse : On suppose $\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}\right)\ge n^2$.
Hérédité : On a, en utilisant l'hypothèse de récurrence et la partie 2.,

$$\Big(\sum_{i=1}^{n+1} a_i\Big)\ \Big(\sum_{i=1}^{n+1}\frac{1}{a_i}\Big)=\Big(a_{n+1}+\sum_{i=1}^n a_i\Big)\ \Big(\frac{1}{a_{n+1}}+\sum_{i=1}^n\frac{1}{a_i}\Big)$$
$$=a_{n+1}\sum_{i=1}^n\frac{1}{a_i}+\frac{1}{a_{n+1}}\sum_{i=1}^n a_i+a_{n+1}\frac{1}{a_{n+1}}+\Big(\sum_{i=1}^n a_i\Big)\ \Big(\sum_{i=1}^n\frac{1}{a_i}\Big)$$
$$\ge\sum_{i=1}^n\Big(\frac{a_{n+1}}{a_i}+\frac{a_i}{a_{n+1}}\Big)+1+n^2\ge\sum_{i=1}^n 2+1+n^2=2n+1+n^2=(n+1)^2.$$

Conclusion : $\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}\right)\ge n^2$ pour tout entier $n\ge 1$.

Exercice 2 : Fonctions trigonométriques.

1. Rappeler les formules pour $\sin(x+y)$ et $\cos(x+y)$. En déduire la formule pour $\tan(x+y)$.
2. Soient $x,y\in\mathbb{R}$ deux réels pour lesquels $xy\ne 1$. Montrer que

$$\arctan x+\arctan y=\arctan\frac{x+y}{1-xy}+k\pi$$

pour un certain $k\in\mathbb{Z}$ dépendant de x et y.

3. Évaluer $\arctan x + \arctan \frac{1}{x}$ pour $x \neq 0$.
4. En déduire la valeur de k de la partie 2. en fonction de x et y.

Solution.

1. $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$ et $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$. Donc
$$\tan(x+y) = \frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)} = \frac{\sin x \cos y + \cos x \sin y}{\cos x \cos y - \sin x \sin y} = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}.$$
2. On a $\tan \arctan z = z$ pour tout $z \in \mathbb{R}$. Ainsi
$$\tan(\arctan x + \arctan y) = \frac{\tan \arctan x + \tan \arctan y}{1 - \tan \arctan x \tan \arctan y} = \frac{x+y}{1-xy} = \tan \arctan \frac{x+y}{1-xy}.$$
Puisque tan est strictement croissante sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et périodique de période π, cela donne
$$\arctan x + \arctan y = \arctan \frac{x+y}{1-xy} + k\pi$$
où $k \in \mathbb{Z}$ dépend de x et y.
3. On pose $f(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$, fonction réelle de domaine $\mathbb{R}^\times$. Alors
$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+(\frac{1}{x})^2} \frac{-1}{x^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0.$$
Ainsi f est constante pour $x > 0$ et pour $x < 0$. On a $\tan 1 = \frac{\pi}{4}$, d'où $\tan x + \tan \frac{1}{x} = \tan 1 + \tan 1 = \frac{\pi}{2}$ pour $x > 0$. Or, tan est impair, d'où $\tan x + \tan \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$ pour $x < 0$.
4. La fonction tan est strictement croissante. Si $0 < x$ et $y > \frac{1}{x}$, alors $\frac{\pi}{2} < \arctan x + \arctan y < \pi$. Comme $-\frac{\pi}{2} < \arctan z < \frac{\pi}{2}$, il faut prendre $k = 1$.
Si $0 < x$ et $y < \frac{1}{x}$, alors $-\frac{\pi}{2} < \arctan x + \arctan y < \frac{\pi}{2}$ et $k = 0$.
Si $x = 0$ on a $k = 0$.
Puisque tan est impair, si $x < 0$ et $y < \frac{1}{x}$ on a $k = -1$, et si $x < 0$ et $\frac{1}{x} < y$ on a $k = 0$.

Exercice 3 : Fonctions hyperboliques.
Étudier le domaine de définition de la fonction f définie par
$$f(x) = \text{Argcosh}\,\Big[\frac{1}{2}(x + \frac{1}{x})\Big]$$
et simplifier son expression lorsqu'elle a un sens. (Il peut s'avérer utile de distinguer deux cas.)
Indication : Utiliser la formule explicite (ou la dériver si vous ne la connaissez pas).

Solution.
Le domaine de Argcosh est $[1, \infty[$. Il faut donc $1 \leq \frac{1}{2}(x + \frac{1}{x})$, soit $2 \leq x + \frac{1}{x}$, ce qui est vrai pour tout $x > 0$ (voir exercice 1.2.). Ainsi $\text{dom}\, f = R_+^\times =]0, \infty[$.
On a $\text{Argcosh}\, z = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1})$. Ainsi
$$\begin{aligned} f(x) &= \ln\Big(\frac{1}{2}(x + \frac{1}{x}) + \sqrt{\frac{1}{4}(x + \frac{1}{x})^2 - 1}\Big) = \ln \frac{1}{2}\Big(x + \frac{1}{x} + \sqrt{x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} - 4}\Big) \\ &= \ln \frac{1}{2}\Big(x + \frac{1}{x} + \sqrt{(x - \frac{1}{x})^2}\Big) = \ln \frac{1}{2}\big(x + \frac{1}{x} + |x - \frac{1}{x}|\big). \end{aligned}$$
Ainsi $f(x) = \ln x$ si $x > \frac{1}{x}$, et $f(x) = \ln \frac{1}{x} = -\ln x$ si $x < \frac{1}{x}$.

Exercice 4 : Étude de fonctions
On considère la fonction réelle
$$f : x \mapsto \frac{x^2}{\ln(e^x + 1)}.$$

1. Donner le domaine de définition maximal.

2. Étudier la parité et la périodicité de f.
3. Étudier les éventuelles limites de f aux bornes de son domaine maximal.
4. Calculer la fonction dérivée de f.
5. Donner le tableau de variations de f.
6. Calculer ses asymptôtes éventuelles.
7. Dresser le graphe de f.

Solution.

1. On a $e^x > 0$, donc $e^x + 1 > 1$ et $\ln(e^x + 1) > 0$. Ainsi $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$.
2. Il n'y a ni périodicité (voir ci-dessous) ni parité : $f(-1) \neq \pm f(1)$ puisque $\ln(1 + e) > \ln(1 + \frac{1}{e}) > 0$.
3. $\lim_{x\to-\infty} \ln(e^x + 1) = 0^+$, d'où $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$. En particulier f n'est pas périodique.
   En $+\infty$ on a
$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} f(x) &= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{\ln(e^x(1 + e^{-x}))} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{\ln e^x + \ln(1 + e^{-x})} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x + \ln(1 + e^{-x})} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{1 + \frac{1}{x}\ln(1 + e^{-x})} = \infty\end{aligned}$$
   puisque $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \ln(1 + e^{-x}) = 0$.
4.
$$f'(x) = \frac{2x\ln(e^x + 1) - x^2 \frac{1}{e^x+1} e^x}{\big(\ln(e^x + 1)\big)^2} = \frac{2x}{\ln(e^x + 1)} - \frac{x^2 e^x}{(e^x + 1)\big(\ln(e^x + 1)\big)^2}.$$
5. Le signe de f' est celui de $2x\ln(e^x + 1) - x^2 \frac{1}{e^x+1} e^x$, voire de $2x(e^x + 1)\ln(e^x + 1) - x^2 e^x$.
   Si $x = 0$ on a $f'(x) = 0$. Si $x > 0$ on a
$$2x(e^x + 1)\ln(e^x + 1) - x^2 e^x > 2xe^x \ln(e^x) - x^2 e^x = x^2 e^x > 0.$$
   Si $x < 0$ on a $2x(e^x + 1)\ln(e^x + 1) - x^2 e^x < 0$ puisque $\ln(e^x + 1) > 0$ et $e^x > 0$. On a $f(0) = 0$. Ceci donne :

x	$-\infty$		0		∞
f'		$-$	0	$+$	
f	∞	$\searrow$	0	$\nearrow$	∞

6. On a $\ln(e^x + 1) = x + \ln(1 + e^{-x})$. Ceci donne
$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\ln(e^x + 1)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x + \ln(1 + e^{-x})} = 1$$
   et
$$\begin{aligned}b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - ax) &= \lim_{x\to\infty} \Big(\frac{x^2}{\ln(e^x + 1)} - x\Big) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - x\ln(e^x + 1)}{\ln(e^x + 1)} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x + \ln(1 + e^{-x})} \lim_{x\to\infty} (x - x - \ln(1 + e^{-x})) = 1 \cdot 0 = 0.\end{aligned}$$
   Ceci donne une asymptote $y = ax + b = x$ en $+\infty$.
   En $-\infty$ on a
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{\ln(e^x + 1)} = -\infty$$
   et pas d'asymptote.