
Mathématiques - DS n°1 CUPGE
Documents et calculatrices interdits

Exercice 1 : Récurrence.

1. Évaluer

$$a) \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} i$$

$$b) \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} j.$$

2. Montrer que pour tout réel $a > 0$ on a $a + \frac{1}{a} \geq 2$.
3. En déduire que pour tous réels $a_1, \dots, a_n > 0$ et tout entier $n \geq 1$ on a

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \right) \geq n^2.$$

On rappelle que $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\sum_{i=0}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Exercice 2 : Fonctions trigonométriques.

1. Rappeler les formules pour $\sin(x+y)$ et $\cos(x+y)$. En déduire la formule pour $\tan(x+y)$.
2. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ deux réels pour lesquels $xy \neq 1$. Montrer que

$$\arctan x + \arctan y = \arctan \frac{x+y}{1-xy} + k\pi$$

pour un certain $k \in \mathbb{Z}$ dépendant de x et y .

3. Évaluer $\arctan x + \arctan \frac{1}{x}$.
4. En déduire la valeur de k de la partie 2. en fonction de x et y .

Exercice 3 : Fonctions hyperboliques.

Étudier le domaine de définition de la fonction f définie par

$$f(x) = \operatorname{Argcosh} \left[\frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{x} \right) \right]$$

et simplifier son expression lorsqu'elle a un sens. (Il peut s'avérer utile de distinguer deux cas.)
Indication : Utiliser la formule explicite (ou la dériver si vous ne la connaissez pas).

Exercice 4 : Étude de fonctions

On considère la fonction réelle

$$f : x \mapsto \frac{x^2}{\ln(e^x + 1)}.$$

1. Donner le domaine de définition maximal.
2. Étudier la parité et la périodicité de f .
3. Étudier les éventuelles limites de f aux bornes de son domaine maximal.
4. Calculer la fonction dérivée de f .
5. Donner le tableau de variations de f .
6. Calculer ses asymptotes éventuelles.
7. Dresser le graphe de f .