

Feuille d'exercices n° 9
CONTINUITÉ ET DÉRIVABILITÉ

Exercice 1. Soient $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ tel que $a < b$, $x_0 \in]a, b[$ et $f :]a, b[\rightarrow \mathbf{R}$. On suppose que f est continue en x_0 et que $f(x_0) > 0$. Montrer qu'il existe un intervalle ouvert I inclus dans $]a, b[$ et contenant x_0 , tel que $\forall x \in I, f(x) > 0$.

Solution : f est continue en $x_0 : \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ tel que :

$$|x_0 - y| < \delta \implies |f(x_0) - f(y)| < \epsilon.$$

On choisit $\epsilon = \frac{f(x_0)}{2}$ alors il existe un $\delta > 0$ tel que $\forall y \in]a, b[, |x_0 - y| < \delta \implies |f(x_0) - f(y)| < \frac{f(x_0)}{2}$
 $\implies \forall y \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[, f(x_0) - f(y) < \frac{f(x_0)}{2}$
 $\implies \forall y \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[, 0 < \frac{f(x_0)}{2} < f(y)$

Donc, en prenant l'ouvert $I =]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap]a, b[$ on a bien : $f(y) > 0 \forall y \in I$.

Exercice 2. Étudier la continuité des fonctions suivantes sur leur domaine de définition :

1. $f : [0, 2] \rightarrow \mathbf{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 2x - 1 & \text{si } 1 < x \leq 2. \end{cases}$
2. $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ définie par $f(x) = x + \frac{\sqrt{x^2}}{x}$ si $x \neq 0$, et $f(0) = 1$.
3. $f : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}$ définie par $f(x) = xE(\frac{1}{x})$ si $x \neq 0$, et $f(0) = 1$, où E est la fonction «partie entière».
4. $f : [-2, 2] \rightarrow \mathbf{R}$ définie par $f(x) = x^2 \sin(\frac{\pi}{x})$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

Solution :

1. f est continue sur $[0, 1[$ et à gauche de 1 par continuité de $x \mapsto x^2$ sur \mathbf{R} .

Ensuite, f est continue sur $]1, 2]$ et à droite de 1 par continuité de $x \mapsto 2x - 1$ donc il suffit de tester la limite à droite en 1 :

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 2x - 1 = 1 = f(1).$$

Par conséquent, f est continue sur $[0, 2]$.

2. f est continue sur \mathbf{R}^* par continuité de la fonction $x \mapsto x + \frac{\sqrt{x^2}}{x}$, il faut donc tester la continuité en 0 .

Sur \mathbf{R}^{+*} , $f(x) = x + \frac{|x|}{x} = x + 1$, donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1 = f(1)$.

Sur \mathbf{R}^{-*} , $f(x) = x + \frac{|x|}{x} = x - 1$, donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -1 \neq f(1)$. Conclusion : f est discontinue en 0.

3. Si $x \in]1, +\infty[$ on a $\frac{1}{x} \in]0, 1[$ et donc $f(x) = xE(\frac{1}{x}) = 0$ alors, f est continue sur $]1, +\infty[$.

Si maintenant $x \in]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$ on a $\frac{1}{x} \in [n, n+1[$, et donc $f(x) = nx$. f est alors continue sur les intervalles de la forme $]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$ il nous reste maintenant qu'à tester la continuité aux points de la forme $1/n$ avec

$n \in \mathbf{N}$ et en 0.

On a $\lim_{x \rightarrow (1/n)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (1/n)^+} x(n-1) = \lim_{x \rightarrow (1/n)^+} \frac{n-1}{n}$ et $\lim_{x \rightarrow (1/n)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (1/n)^-} xn = 1$. Donc f n'est pas continue en $(1/n), \forall n \in \mathbf{N}$.

On a finalement, $\forall x \in]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$, $\frac{n}{n+1} < f(x) \leq 1$ donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1 = f(1)$ ainsi f est continue à droite en 0.

4. f est continue sur $[-2, 2] \setminus \{0\}$ par continuité de la fonction $x \mapsto x^2 \sin(\frac{\pi}{x})$

Maintenant il suffit de tester la continuité en 0.

On a $|f(x)| \leq x^2$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

Exercice 3.

1. Montrer que si $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ est une fonction continue telle que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty,$$

alors f est surjective.

2. Soit $P \in \mathbf{R}[X]$ un polynôme de degré impair. Montrer que P admet une racine réelle.

3. Donner un exemple de polynôme à coefficients réels, de degré pair, n'admettant pas de racine réelle.

Solutions :

1. f est surjective $\Leftrightarrow \forall y \in \mathbf{R}, \exists x \in \mathbf{R} f(x) = y$.

Soit maintenant $y \in \mathbf{R}$, comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ alors il existe $z \in \mathbf{R}$ tel que $f(z) \geq y$, de même il existe $p \in \mathbf{R}$ tel que $f(p) \leq y$. Par le théorème des valeurs intermédiaires il existe $x \in \mathbf{R}$ tel que $f(x) = y$.

2. Soit P un polynôme de degré impair, quitte à considérer $-P$, on peut supposer que le coefficient dominant est strictement positive, dans ce cas on a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = -\infty$$

Donc P est surjective (d'après la question.1), en particulier $P(x) = 0$ admet ou moins une solution dans \mathbf{R} .

3. $x \mapsto x^2 + 1$ ou tout simplement $x \mapsto c$, avec c une constante $\neq 0$.

Exercice 4. Montrer qu'il existe $x \in [\frac{3\pi}{4}, \pi]$ tel que

$$\tan(x) + \frac{x}{3} = 0.$$

Solutions :

On considère la fonction f définie sur $[\frac{3\pi}{4}, \pi]$ dans \mathbf{R} par : $f(x) = \tan(x) + \frac{x}{3}$.

On a $f(\pi) = \tan(\pi) + \frac{\pi}{3} = 0 + \frac{\pi}{3} > 0$, et $f(\frac{3\pi}{4}) = \tan(\frac{3\pi}{4}) + \frac{3\pi}{4} = \frac{\sin(\frac{3\pi}{4})}{\cos(\frac{3\pi}{4})} + \frac{\pi}{4} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} + \frac{\pi}{4} = -1 + \frac{\pi}{4} < 0$.

Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x \in [\frac{3\pi}{4}, \pi]$ tel que : $f(x) = 0$.

Exercice 5.

1. Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ une application continue, telle que $f([0, 1]) \subset [0, 1]$. Montrer que f possède un point fixe.
2. Soit $g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ une application. On suppose que pour tout $(x, y) \in [0, 1]^2$ tels que $x \neq y$, on a $|g(x) - g(y)| < |x - y|$. Montrer que g admet un unique point fixe.

Solutions :

1. On considère la fonction h définie sur $[0, 1]$ dans \mathbf{R} par : $h(x) = f(x) - x$.
On a $h(0) = f(0) - 0 \geq 0$ et $h(1) = f(1) - 1 \leq 0$ alors il existe $x \in [0, 1]$ tel que $h(x) = 0$ et par conséquent, il existe $x \in [0, 1]$ tel que $f(x) = x$.
2. On remarque que $|g(x) - g(y)| \leq |x - y| \forall x \neq y$. Donc, la fonction g est 1-Lipschitzienne, ce qui implique que g est continue.
Par la question .1, g admet un point fixe, ensuite on suppose qu'elle en admette plus qu'un, soient x et y deux points fixes différents de g , on a :

$$|x - y| = |g(x) - g(y)| < |x - y|.$$

Contradiction, du coup g admet un et un seul point fixe.

Exercice 6.

1. Soit $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue et périodique. Montrer que f possède un maximum et un minimum.
2. Calculer

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x (\sin^8(x) + \cos^{14}(x))}.$$

Solutions :

1. Comme la fonction f est périodique (on suppose que sa période est L), il suffit de montrer qu'elle possède un minimum et un maximum sur $[0, L]$ pour en déduire qu'elle un maximum et un minimum sur \mathbf{R} .

Pour cela, on considère la fonction h définie sur $[0, L]$ par $x \mapsto f(x)$. La fonction h est continue et définie sur un segment, donc par le théorème du maximum h atteint son maximum, noté M . Ensuite, comme $\max -h = -\min h$, en appliquant le théorème du maximum à $-h$ on trouve que le minimum m de h est aussi atteint. Pour tout $x \in \mathbf{R}$ il existe $k \in \mathbf{Z}$ tel que $y := x - kL \in [0, L]$ (prendre $k = \lfloor x/L \rfloor$). On a alors $m \leq h(y) \leq M$, et puisque $f(x) = f(y) = h(y)$ (par L -périodicité) on en déduit que $m \leq f(x) \leq M$. Donc m (resp. M) est un minimum (resp. maximum) global de f sur \mathbf{R} .

2. Soit $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ définie par $x \mapsto \sin^8(x) + \cos^{14}(x)$, g est continue et périodique, par la question 1. elle possède donc un minimum m . Notons que pour tout $x \in \mathbf{R}$ on a $\sin^8(x) \geq 0$ et $\cos^{14}(x) \geq 0$, en particulier $g(x) \geq 0$. De plus $g(x) = 0$ et seulement si $\sin(x) = 0$ et $\cos(x) = 0$, ce qui n'est pas possible car cela impliquerait $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 0$ (on sait que $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ pour tout $x \in \mathbf{R}$). Donc $g(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbf{R}$. On en déduit que $m > 0$ (car le minimum est atteint).

Par conséquent, $g(x) \geq m > 0, \forall x \in \mathbf{R}$. D'où*

$$0 \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x (\sin^8(x) + \cos^{14}(x))} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{xg(x)} \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{xm} = 0.$$

Exercice 7. Montrer que la fonction $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $x \mapsto x^2$ n'est pas uniformément continue.

Solutions :

f n'est pas uniformément continue $\Leftrightarrow \exists \epsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists (x, y) \in \mathbf{R}$ on a : $|x - y| \leq \delta \implies |f(x) - f(y)| > \epsilon$. Ici, $f(x) - f(y) = x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$,

On choisit $\epsilon = 1$ et pour tout δ on prend $x = \delta$ et $y = \delta + \epsilon$, on a bien $|x - y| \leq \delta = 1$. et $|f(x) - f(y)| = |x - y||x + y| = |2\delta + 1| > \delta$. D'où, f n'est pas uniformément continue.

Exercice 8. Le but de cet exercice est de déterminer l'ensemble des applications $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ continues qui vérifient la condition

$$(*) : \quad \forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, f(x + y) = f(x)f(y).$$

Soit f vérifiant (*).

1. Montrer que : $\forall n \geq 2, \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n, f(x_1 + \dots + x_n) = f(x_1) \cdots f(x_n)$.
2. Quelles sont les valeurs possibles pour $f(0)$?
3. On suppose qu'il existe $x_0 \in \mathbf{R}$ tel que $f(x_0) = 0$. Que peut-on dire de f ?
On suppose désormais que f ne s'annule pas.
4. Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbf{R}_+^*$ tel que pour tout $n \in \mathbf{N}, f(n) = \alpha^n$.
5. Montrer que : $\forall k \in \mathbf{Z}, f(k) = \alpha^k$.
6. Montrer que : $\forall r \in \mathbf{Q}, f(r) = \alpha^r$.
7. Conclure.

Solutions :

1. On procède par récurrence, soit $(P_n) : \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n, f(x_1 + \dots + x_n) = f(x_1) \cdots f(x_n)$.

Initialisation : pour $n = 2$, d'après (*), $\forall (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2, f(x_1 + x_2) = f(x_1)f(x_2)$.

Hérédité : On suppose que (P_n) est vraie et on démontre que (P_{n+1}) est vraie :

Soit $(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+1}$, on :

$$\begin{aligned} f(x_1 + x_2 + \dots + x_{n+1}) &= f((x_1 + x_2 + \dots + x_n) + x_{n+1}) \\ &= f(x_1 + x_2 + \dots + x_n) + f(x_{n+1}) \quad \text{par (*)} \\ &= f(x_1)f(x_2)\dots f(x_n)f(x_{n+1}) \quad \text{par } (P_n). \end{aligned}$$

Conclusion : $\forall n \geq 2, \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n, f(x_1 + \dots + x_n) = f(x_1) \cdots f(x_n)$. 2. D'après (*), on a $f(0 + 0) = f(0) = f(0)f(0) = f(0)^2, \implies f(0) \in \{0, 1\}$.

3. On suppose qu'il existe $x_0 \in \mathbf{R}$ tel que $f(x_0) = 0$, soit $x \in \mathbf{R}$, d'après (*) on a : $f(x) = f(x - x_0 + x_0) = f(x - x_0)f(x_0) = 0$ donc $f(x) = 0$, par conséquent f est nulle sur tout \mathbf{R} .

4. On prenant $x_1 = \dots = x_n = 1$ on a $f(n) = f(1)^n$ on pose $\alpha = f(1)$, comme f ne s'annule pas on a $f(0) = 1$, par la contraposé du TVI $f(1) = \alpha > 0$.

5. On a $f(-1)f(1) = f(-1+1) = f(0) = 1, \implies f(-1) = f(1)^{-1} = \alpha^{-1}$, on prenant $x_1 = \dots = x_k = -1$ on a : $f(-k) = f(-1)^k = \alpha^{-k}$ donc $\forall k \in \mathbf{Z}, f(k) = \alpha^k$.

6. Soient $p \in \mathbf{Z}, q \in \mathbf{N}^*$, on a :

$$\alpha^p = f(p) = f(q(\frac{p}{q})) = f(\frac{p}{q} + \frac{p}{q} + \dots + \frac{p}{q}) = f(\frac{p}{q})^q, \implies f(\frac{p}{q}) = \alpha^{\frac{p}{q}}.$$

Donc, $\forall r \in \mathbf{Q}, f(r) = \alpha^r$.

7. Soit $x \in \mathbf{R}$, par densité de \mathbf{Q} on sait qu'il existe une suite $r_i \in \mathbf{Q}$ tel que $\lim_{i \rightarrow +\infty} r_i = x$, on a alors $f(x) = \lim_{i \rightarrow +\infty} f(r_i) = \lim_{i \rightarrow +\infty} \alpha^{r_i} = \lim_{i \rightarrow +\infty} \exp(r_i \alpha) = \exp(x\alpha) = \alpha^x$.
Réciproquement, si $f(x) = \alpha^x, \forall x \in \mathbf{R}$ et $\alpha > 0$ f vérifie bien (*).

Exercice 9. Soit $a \in \mathbf{Z}$. On définit $f : \mathbf{R}^* \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto x^a \cos\left(\frac{1}{x}\right)$.

1. À quelle condition sur a la fonction f est-elle prolongeable par continuité en 0 ?
2. Lorsqu'il existe, à quelle condition ce prolongement est-il dérivable en 0 ?
3. Dans ce cas, la dérivée de f est-elle continue en 0 ?

Solutions :

1. f est prolongeable par continuité si $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ existe.

Si $a \geq 1$ alors on $|f(x)| \leq x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$. donc f est prolongeable pour en 0 si $a \geq 1$, et $f(0) = 0$.

Si $a \leq 0$, en testant la fonction $f(x)$ sur les valeurs $\frac{1}{2n\pi}$ et $\frac{1}{2n\pi + \pi/2}$ on s'aperçoit que f n'est pas prolongeable par continuité en 0 quand $a \leq 0$.

2. Ce prolongement est dérivable lorsque $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ admet une limite.

On a : $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{x^a \cos\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = x^{a-1} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$. donc f est dérivable $\Leftrightarrow, a \geq 2$., la dérivée de f en 0 serait égale à 0 dans ce cas.

3. Supposons $a \geq 2$, on a : $f'(x) = ax^{a-1} \cos\left(\frac{1}{x}\right) + x^{a-2} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, on sait que $\lim_{x \rightarrow 0} ax^{a-1} \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.

D'autre part, $x^{a-2} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ admet une limite que lorsque $a \geq 3$ cette limite = 0. Par conséquent f' est continue en 0 si et seulement si $a \geq 3$.

Exercice 10. Soit f la fonction définie sur $[0, 1]$ par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ x + \frac{x \ln(x)}{1-x} & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

1. Montrer que la fonction f est continue sur $[0, 1]$, et dérivable sur $]0, 1[$.
2. La fonction f est-elle dérivable en 0 ? En 1 ?
3. Montrer qu'il existe $c \in]0, 1[$ tels que $f'(c) = 0$.

Solutions :

1. On a : $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) = 0$ alors : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, comme $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{1-x} = -1$ alors : $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} x + \frac{x \ln(x)}{1-x} = 0$. Donc f est continue sur $[0, 1]$, ensuite, f est dérivable sur $]0, 1[$ par la dérivabilité de $x \mapsto x + \frac{x \ln(x)}{1-x}$ sur $]0, 1[$.

2. On a $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + \frac{x \ln(x)}{1-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 + \frac{\ln(x)}{1-x} = -\infty$ alors f n'est pas dérivable en 0. Pour calculer

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x + \frac{x \ln(x)}{1-x}}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} x \frac{h(x)}{g(x)}$$

avec $h(x) = x - 1 - \ln(x)$ et $g(x) = (x - 1)^2$. On a

$$\begin{aligned} h(1) &= 0, & h'(x) &= x - \frac{1}{x}, & h'(1) &= 0, & h''(x) &= \frac{1}{x^2}, & h''(1) &= 1, \\ g(1) &= 0, & g'(x) &= 2(x - 1), & g'(1) &= 0, & g''(x) &= 2, & g''(1) &= 2. \end{aligned}$$

On applique alors la règle de l'Hôpital deux fois en commençant avec les fonctions h' et g' , puis avec h et g . On trouve

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{h'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{h''(x)}{g''(x)} = \frac{1}{2} \quad \text{puis} \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{h(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{h'(x)}{g'(x)} = \frac{1}{2}.$$

Donc, f est dérivable en 1.

3. On a f continue sur $[0, 1]$, dérivable sur $]0, 1[$ et $f(0) = f(1)$, alors par le théorème de Rolle, il existe $c \in]0, 1[$ tel que : $f'(c) = f(1) - f(0) = 0$.

Exercice 11. Soient un entier $n \geq 1$ et une fonction $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, n fois dérivable, et telle que $f^{(n)}$ est continue. On suppose que f s'annule en $n + 1$ points distincts. Montrer que f' s'annule au moins n fois, puis que $f^{(n)}$ s'annule au moins une fois.

Solutions :

Soit (P_n) : Toute fonction n fois dérivable tel que $f^{(n)}$ est continue, si f s'annule en $n + 1$ points distincts alors $f^{(n)}$ s'annule au moins une fois.

Initialisation : Soit f une fonction 1 fois dérivable tel que $f' = f^{(1)}$ est continue, si f s'annule 2 fois en deux points distincts, supposons : $f(a) = f(b) = 0, a \neq b$ alors par le théorème de Rolle il existe $c \in]a, b[$ tel que $f^{(1)}(c) = 0$. Donc (P_1) est vérifiée.

Hérédité : supposons que (P_n) est vraie et montrons (P_{n+1}) , soit f une fonction $n + 1$ fois dérivable tel que $f^{(n+1)}$ est continue, si f s'annule en $n + 2$ points distincts, alors si on note ces points par a_0, a_1, \dots, a_{n+2} on a : sur chaque intervalle $[a_i, a_{i+1}]$ il existe $b_i \in]a_i, a_{i+1}[$ tels que $f'(b_i) = 0$ par le théorème de Rolle, la fonction f' est n fois dérivable et $(f')^{(n)} = f^{(n+1)}$ est continue, f' s'annule en $n + 1$ points distincts (les b_i) donc par (P_n) , $(f')^{(n)} = f^{(n+1)}$ s'annule au moins une fois, d'où (P_{n+1}) est vraie.

Conclusion : Toute fonction n fois dérivable tel que $f^{(n)}$ est continue, f s'annule en $n + 1$ points distincts alors $f^{(n)}$ s'annule au moins une fois.

Exercice 12. À l'aide du théorème des accroissements finis, montrer que pour tout $t > 0$

$$\arctan t > \frac{t}{1+t^2}.$$

Solutions :

On sait que $\arctan'(t) = \frac{1}{1+t^2}, \forall t \in \mathbf{R}$, par le TAF, il existe $z \in]0, t[$ tel que l'on a

$$\arctan(t) = \arctan(t) - \arctan(0) = t(\arctan'(z)) = \frac{t}{1+z^2} > \frac{t}{1+t^2}.$$

Car $\frac{1}{1+z^2} > \frac{1}{1+t^2}$.

Exercice 13. À l'aide du théorème des accroissements finis, déterminer

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left((x+1)e^{\frac{1}{x+1}} - xe^{\frac{1}{x}} \right).$$

Solutions :

Soit $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ définie par $x \mapsto xe^{\frac{1}{x}}$, on a : $f'(x) = e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}} \left(1 - \frac{1}{x}\right) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 1$.

On remarque que $(x+1)e^{\frac{1}{x+1}} - xe^{\frac{1}{x}} = f(x+1) - f(x)$, donc par le théorème des accroissements finis, il existe $c(x) \in]x, x+1[$ tel que $(x+1)e^{\frac{1}{x+1}} - xe^{\frac{1}{x}} = f'(c(x))$, par conséquent :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left((x+1)e^{\frac{1}{x+1}} - xe^{\frac{1}{x}} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} f'(c(x)) = 1.$$

Exercice 14. Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction dérivable sur $[0, 1]$ telle que $f(0) = 0$.

1. On suppose que pour $0 \leq x \leq 1$, on a $f'(x) \neq 0$. Montrer que f est de signe constant sur $[0, 1]$.
2. On suppose de plus que f' est continue sur $[0, 1]$, et que $f'(x) > 0$ pour $x \in [0, 1]$. Montrer qu'il existe un réel $m > 0$ tel que pour $x \in [0, 1]$, $f(x) \geq mx$.

Solutions :

1. On suppose que f n'est pas de signe constant sur $[0, 1]$ alors $\exists x, y \in]0, 1[$ tel que $f(x) < 0$ et $f(y) > 0$, d'après le TVI, il existe $z \in [x, y]$, $f(z) = 0$, puis en appliquant le TAF : $0 = f(z) - f(0) = z f'(t)$ pour un certain $t \in [0, 1]$, ce qui contredit le fait que $f'(x) \neq 0, \forall x \in [0, 1]$.

2. f' est une fonction continue définie sur un segment, d'après le théorème du maximum appliqué à $-f'$, $\max(-f')$ est atteint, comme $\max(-f') = -\min(f')$ alors $\min(f')$ est aussi atteint, donc il existe $z \in [0, 1]$ tel que $0 < f'(z) \leq f'(x), \forall x \in [0, 1]$.

Le TAF $\implies f(x) - f(0) = f(x) = x f'(l)$ pour un certain $l \in [0, 1]$, d'après ce qui précède, $f(x) \geq f'(z)x$. Il suffit alors de prendre $m = f'(z)$ pour répondre à la question.

Exercice 15. Soit $f : [0, \infty[\rightarrow [0, \infty[$ une fonction continue telle que $f(x)/x$ a une limite réelle $\ell \in [0, 1[$ quand x tend vers ∞ . Montrer que f a un point fixe.

Solutions :

On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} < 1$, donc il existe $a \in \mathbf{R}$ tel que $\forall x \geq a, \frac{f(x)}{x} \leq 1$, donc $\forall x \geq a, f(x) \leq x$.

On considère la fonction $g : \mathbf{R}^* \rightarrow \mathbf{R}^*, x \mapsto f(x) - x$, on a : $g(0) \geq 0$ car l'image de f est dans $[0, +\infty[$, ensuite, $g(a) \leq a$ car $f(a) \leq 0$. Par le TVI, il existe $c \in [0, a]$ tel que $g(c) = 0$ et donc $f(c) = c$.

Exercice 16. Soit f continue sur \mathbf{R}_+ telle que, pour tout réel positif x , on ait $f(x^2) = f(x)$. Montrer que f est constante.

Solutions :

On démontre par récurrence que $f(x) = f(x^{\frac{1}{2^n}}), \forall n \in \mathbf{N}$.

Initialisation : pour $n = 1$ on a bien $f(x) = f(x^{\frac{1}{2}})$ (car $f(x) = f(x^2)$).

Hérédité : supposons que la propriété est vraie pour $n \in \mathbf{N}$ et démontrons qu'elle l'est pour $n + 1$, on a :

$$f(x) = f(x^{\frac{1}{2}}) = f\left(\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2^n}}\right) = f\left(x^{\frac{1}{2^{n+1}}}\right).$$

Conclusion : $f(x) = f(x^{\frac{1}{2^n}}), \forall n \in \mathbf{N}$.

Maintenant, on sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{2^n}} = 1, \forall x \in \mathbf{R}^{*,+}$, alors on a :

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f\left(x^{\frac{1}{2^n}}\right) = f(1).$$

Par la continuité de f , on a alors $f(x) = f(1), \forall x \neq 0$. Ensuite, par la continuité de f on a $f(0) = f(1)$.

Enfin, f est constante sur \mathbf{R}^+ .

Exercice 17. Soit $f : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}$ continue et admettant une limite réelle quand x tend vers ∞ . Montrer que f est uniformément continue sur \mathbf{R}_+ .

Solutions :

Supposons que $\lim f(x) = l$, soit $\epsilon > 0$, il existe $A \in \mathbf{R}$ tel que $\forall x \geq A, |f(x) - l| \leq \frac{\epsilon}{3}$, comme f est uniformément continue sur $[0, A]$ par le théorème de Heine (car $[0, A]$ est compacte), alors pour ce ϵ , $\exists \delta$ tel que $|x - y| \leq \delta \implies |f(x) - f(y)| \leq \frac{\epsilon}{3}$.

Soient maintenant, $x, y \in \mathbf{R}$ tel que $|x, y| \leq \delta$, si $(x, y) \in [0, A]$ on a bien $|f(x) - f(y)| \leq \epsilon/3 \leq \epsilon$, si $x, y \geq A$ on a $|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - l| + |f(y) - l| \leq \epsilon/3 + \epsilon/3 \leq \epsilon$. Finalement, si $x \leq A$ et $y \geq A$ (ou le contraire), on a $|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(A)| + |f(A) - l| + |l - f(y)| \leq \epsilon/3 + \epsilon/3 + \epsilon/3 \leq \epsilon$. Conclusion : $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ tel que $|x - y| \leq \delta \implies |f(x) - f(y)| \leq \epsilon$, par conséquent, f est uniformément continue.

Exercice 18. Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ continue et vérifiant $f(0) = f(1)$.

1. Soit n un entier naturel non nul et soit $a = 1/n$. Montrer que l'équation $f(x + a) = f(x)$ admet au moins une solution.
2. Montrer (en fournissant une fonction précise) que, si a est un réel de $]0, 1[$ qui n'est pas de la forme précédente, il est possible que l'équation $f(x + a) = f(x)$ n'ait pas de solution.

Solutions :

1. $\forall n \in \mathbf{N}$ on définit $h : [0, \frac{n-1}{n}] \rightarrow \mathbf{R}$ par : $x \mapsto f(x + \frac{1}{n}) - f(x)$, on a

$$\sum_{i=0}^{n-1} h\left(\frac{i}{n}\right) = \sum_{i=0}^{n-1} \left(f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{i}{n}\right) \right) = f(1) - f(0) = 0,$$

Donc il existe $i, j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ différents tels que l'on a : $h\left(\frac{i}{n}\right) \leq 0$ et $h\left(\frac{j}{n}\right) \geq 0$ par suite, par le TVI il existe $c \in \left[\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right]$ (on suppose que $j > i$) tel que $h(c) = f\left(c + \frac{1}{n}\right) - f(c) = 0$.

2. Soit $a \in [0, 1]$ n'étant pas de la forme $\frac{1}{n}$ pour un certain n dans \mathbf{N} . Soit $g(x) = \left| \sin\left(\frac{x\pi}{a}\right) \right|$ on sait que $g(x + a) - g(x) = 0, \forall x \in [0, 1]$.

Soit maintenant la fonction $P : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ définie par $x \mapsto g(x) - xg(1)$, on a :

$$P(x + a) - P(x) = g(x + a) - (x + a)g(1) - g(x) + xg(1) = -ag(1) \neq 0.$$

Pour P , il n'existe aucun $x \in [0, 1]$ tel que $P(x + a) - P(x) = 0$.

Voici un exemple avec $a = 0.3$ ($P(x) = \left| \sin\left(\frac{x\pi}{a}\right) \right| - x\left| \sin\left(\frac{\pi}{a}\right) \right|$).

Exercice 19. Soit $f \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbf{R})$ telle que $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \sup\{f'(x) : x \in [a, b]\}$.

Montrer que f est affine.

Solutions :

cas1 : si $\sup\{f'(x) : x \in [a, b]\} = 0$, on a alors $f'(x) \leq 0, \forall x \in [a, b]$ donc f est décroissante, ainsi et comme $f(a) = f(b)$ on a alors : f est constante donc affine.

cas2 : le cas contraire, on considère la fonction $g(x) = f(x) - (x-a)\frac{f(a)-f(b)}{a-b}$, on a dans ce cas

$$\sup\{g'(x) : x \in [a, b]\} = \sup\{f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a} : x \in [a, b]\} = 0$$

$g(a) = g(b) (= f(a))$, donc g est constante d'après ce qui précède, par suite f est affine.

Exercice 20. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}_+^*)$ telle que $\lim_{x \rightarrow \infty} x f'(x) = 1$. Montrer que $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$.

Solutions :

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} x f'(x) = 1$ on a : $\exists r \in \mathbf{R}, \forall x \geq r, f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante à partir d'un certain rang, donc forcément elle admet une limite.

Supposons que la limite de f est finie, notée l

On a alors d'une part $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - f(y) = l - f(y)$ pour un y fixé et $x \geq y$, d'autre part : $\exists c \in [y, x]$ tel que $f(x) - f(y) = (x - y)f'(c)$, on a :

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-y}{x} = 1, \frac{x}{c} \geq 1$ et choisissons y tel que $\forall w \geq y$ on a $w f'(w) \geq \frac{1}{2}$, en combinant ce qu'on a :

$$l - f(y) = \lim f(x) - f(y) = \lim (x - y)f'(c) = \lim \frac{x - y}{x} \frac{x}{c} f'(c) \geq (\lim \frac{x - y}{x})(1)(\frac{1}{2}) \geq \frac{1}{2}$$

Ce qui donne $(l - f(y)) \geq \frac{1}{2}, \forall y$ à partir d'un certain rang, ce qui implique en passant à la limite en y que $0 \geq \frac{1}{2}$

Donc la limite de f ne peut être finie, en conséquence : $\lim f = +\infty$.

Exercice 21. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R})$ vérifiant pour tout x réel, $f \circ f(x) = \frac{x}{2} + 3$. En remarquant que $f(\frac{x}{2} + 3) = \frac{f(x)}{2} + 3$, montrer que f' est constante, puis déterminer f .

Solutions :

On a :

$$\frac{f(x)}{2} + 3 = f \circ f(f(x)) = f \circ f \circ f(x) = f(f \circ f(x)) = f\left(\frac{x}{2} + 3\right)$$

En dérivant cette relation on obtient : $(\frac{1}{2})f'(\frac{x}{2} + 3) = (\frac{1}{2})f'(x) \implies f'(\frac{x}{2} + 3) = f'(x)$.

On peut montrer par récurrence que : $\forall x \in \mathbf{R}, f'(x) = f'\left(\frac{x+6(2^n-1)}{2^n}\right)$, on a alors, $\forall x \in \mathbf{R}$:

$$f'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'\left(\frac{x+6(2^n-1)}{2^n}\right) = f'(6).$$

Ainsi, f' est constante sur tout \mathbf{R} , donc f est de la forme $x \mapsto ax + b$,

En remplaçant dans l'équation : $f \circ f(x) = \frac{x}{2} + 3$, on trouve :

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad b = \frac{3\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}}.$$

Exercice 22. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R})$ vérifiant $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) + f'(x)) = 0$. Montrer que $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0$. (Indication : Considérer $g(x) = e^x f(x)$.)

Solutions :

Posons $g(x) = e^x f(x)$ on a : $g'(x) = e^x (f(x) + f'(x))$

Fixons $c > 0$, alors il existe N , $\forall x \geq N$, $-c \leq f(x) + f'(x) \leq c$ donc $-ce^x \leq g'(x) \leq ce^x$.

Cela implique que les fonctions $x \mapsto ce^x - g(x)$ et $x \mapsto ce^x + g(x)$ ont des dérivées positives pour $x \geq N$. Donc à partir de N , ces deux fonctions sont croissantes, par suite il existe $d \in \mathbf{R}$ tel que $ce^x - g(x) \geq d$ et $ce^x + g(x) \geq d \forall x \geq N$.

Ainsi :

$$-c + de^{-x} < e^{-x} g(x) = f(x) < c - de^{-x}$$

ce qui implique que $\forall x \geq N$, $|f(x)| \leq c$. comme cela est vrai pour tout c on a donc $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$, par conséquent $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0$ aussi.