Mathématiques - CF Analyse 1

Corrigé

<u>Exercice 1 :</u> Les réels.

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

1. Pour $x \in \mathbb{R}$ justifier l'existence du réel $d(x,A) = \inf\{|x-a| : a \in A\}$, appelé la *distance* de x à A.
2. Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ on a $|d(x,A) - d(y,A)| \le |x-y|$.
3. On rappelle que l'adhérence $\bar{X}$ d'une partie $X \subseteq \mathbb{R}$ est définie par
$$\bar{X} = \{x \in \mathbb{R} : \forall \epsilon > 0,\ ]x-\epsilon, x+\epsilon[\cap X \neq \emptyset\}.$$
Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $x \in \bar{A}$ si et seulement si $d(x,A) = 0$.

Solution.

1. A est non-vide, il y a donc $a_0 \in A$. Donc $|x-a_0| \in \{|x-a| : a \in A\}$, qui est non-vide, et minoré par 0. D'après l'axiome de la borne supérieure $\inf\{|x-a| : a \in A\}$ existe.
2. Soit $\epsilon > 0$. Alors il y a $a_0 \in A$ tel que $|y-a_0| \le d(y,A) + \epsilon$. Par l'inégalité triangulaire
$$d(x,A) \le |x-a_0| \le |x-y| + |y-a_0| \le |x-y| + d(y,A) + \epsilon.$$
Puisque c'est vrai pour tout $\epsilon > 0$, on a $d(x,A) \le |x-y| + d(y,A)$, soit $d(x,A) - d(y,A) \le |x-y|$. Par symétrie, $d(y,A) - d(x,A) \le |y-x| = |x-y|$. Ainsi $|d(x,A) - d(y,A)| \le |x-y|$.
3. Soit $x \in \bar{A}$, et $\epsilon > 0$. Alors il y a $a_0 \in]x-\epsilon, x+\epsilon[\cap A$. Donc $d(x,A) \le |x-a_0| < \epsilon$. Puisque c'est vrai pour tout $\epsilon > 0$, on a $d(x,A) = 0$.
Réciproquement, soit $d(x,A) = 0$. Soit $\epsilon > 0$. Alors il y a $a_0 \in A$ tel que $|x-a_0| \le d(x,A) + \epsilon/2 < \epsilon$. Donc $a_0 \in]x-\epsilon, x+\epsilon[\cap A$. Ainsi $]x-\epsilon, x+\epsilon[\cap A \neq \emptyset$ pour tout $\epsilon > 0$, et $x \in \bar{A}$.

<u>Exercice 2 :</u> Suites.

Soit $(u_n)_n$ une suite réelle. On pose $v_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k$. On suppose que $(u_n)_n$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$.

1. Pour tout $\epsilon > 0$, justifier qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n > n_0$ entraîne : $|u_n - l| \le \epsilon/2$.
2. Montrer qu'il existe $n_1 > n_0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n > n_1$ entraîne : $\dfrac{|u_0 - l| + ... + |u_{n_0} - l|}{n+1} \le \epsilon/2$.
3. En déduire que si $(u_n)_n$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, alors $(v_n)_n$ aussi.
4. Est-ce que la réciproque est vraie ? Justifier la réponse.
5. Est-ce que la partie 3. reste vraie si $\ell \in \pm\infty$? Justifier la réponse.
6. En déduire que si $(a_n)_n$ est une suite avec $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = \ell$, alors $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \ell$.

Solution.

1. D'après la définition de la limite, puisque $\lim_{n\to\infty} u_n = \ell$, pour tout $\epsilon > 0$ il y a $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n > n_\epsilon$ on a $|u_n - \ell| < \epsilon$. On peut donc prendre $n_0 = n_{\epsilon/2}$.
2. Soit $r = \sum_{k=0}^{n_0} |u_k - \ell|$, et $\epsilon > 0$ de la partie 1. On pose $n_1 = 1 + \max\{n_0, E(2r/\epsilon)\}$, où $E(x)$ dénote la partie entière de x. Alors $n_1 > n_0$, et $n_1 > 2r/\epsilon$, soit $r/n_1 < \epsilon/2$. Ainsi pour tout $n > n_1$ on a $r/n \le r/n_1 < \epsilon/2$.
3. Soient $\epsilon > 0$, n_0 de la partie 1. et n_1 de la partie 2. Alors pour tout $n > n_1$ on a
$$\begin{aligned}|v_n - \ell| &= \Big|\Big(\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k\Big) - \ell\Big| = \Big|\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(u_k - \ell)\Big| = \Big|\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n_0}(u_k - \ell) + \frac{1}{n+1}\sum_{k=n_0+1}^{n}(u_k - \ell)\Big| \\ &\le \frac{1}{n+1}\Big|\sum_{k=0}^{n_0}(u_k - \ell)\Big| + \frac{1}{n+1}\sum_{k=n_0+1}^{n}|u_k - \ell| \le \frac{\epsilon}{2} + \frac{n-n_0}{n_0}\,\frac{\epsilon}{2} \le \epsilon.\end{aligned}$$
Ainsi $\lim_{n\to\infty} v_n = \ell$.

4. La réciproque est fausse. On pose $u_n = (-1)^n$. Alors $v_n = \frac{1}{n+1}$ pour n pair, et $v_n = 0$ pour n impair. Ainsi $\lim_{n\to\infty} v_n = 0$, mais $(u_n)_n$ ne converge pas, puisque ça alterne entre 0 et 1.
5. Supposons $\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$. Donc pour tout $\ell_i n\mathbb{N}$ il y a n_0 tel que $u_n \geq \ell + 2$ pour tout $n > n_0$. Soit $r = \sum_{k=0}^{n_0} u_k$, et $n_1 = \max\{(n_0+1)(\ell+2), |r|\}$. Alors pour tout for $n \geq n_1$ on a $\frac{r}{n} \geq -1$ et $\frac{n_0+1}{n+1}(\ell+2) \leq 1$, ce qui donne
$$v_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n_0} u_k + \frac{1}{n+1}\sum_{k=n_0+1}^{n} u_k \geq \mathfrak{r}n + 1 + \frac{n-n_0}{n+1}(\ell+2) \geq -1 + (\ell+2) - 1 = \ell.$$
Ceci montre $\lim_{n\to\infty} v_n = +\infty$.
Si $\lim_{n\to\infty} u_n = -\infty$, on considère $u'_n = -u_n$, ce qui donne $v'_n = -v_n$ et $\lim_{n\to\infty} u'_n = \infty$, d'où $\lim_{n\to\infty} v'_n = \infty$ d'après la partie précédente, et $\lim_{n\to\infty} v_n = -\infty$.
6. On pose $u_n = a_{n+1} - a_n$, et $v_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_n = \frac{1}{n+1}(a_{n+1} - a_0)$ (somme téléscopique). Alors $\lim_{n\to\infty} u_n = \ell$, ce qui donne d'après la partie 3.
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{n+1} - 0 = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{n+1} - \lim_{n\to\infty}\frac{a_0}{n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_0}{n+1} = \lim_{n\to\infty} v_n = \ell.$$

<u>Exercice 3 :</u> Continuité.
Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que l'on suppose convexe, c'est-à-dire : $f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$, pour tout $t \in [0,1]$ et pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
On pose $\alpha = f(1) - f(0)$, $\beta = f(0) - f(-1)$ et $\gamma = \max\{|\alpha|, |\beta|\}$.

1. Soit $x \in]0,1[$. Montrer que $\beta x \leq f(x) - f(0) \leq \alpha x$.
(Indication : Utiliser le fait que $x = t1 + (1-t)0$ avec $t = x$ et $0 = tx + (1-t)(-1)$, avec $t = 1/(1+x)$.)
2. En déduire que $\lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$.
3. Montrer que $\lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0)$. En déduire que f est continue en 0.
(Indication : On pourra montrer que $f(-x)$ est convexe.)
4. Montrer que f est continue en tout point de $\mathbb{R}$.
(Indication : Pour $a \in \mathbb{R}$, on pourra montrer que la fonction $x \mapsto g(x) = f(x+a)$ est convexe.)

Solution.

1. On pose $t = x$. Alors $x = t1 + (1-t)0$, et par convexité
$$f(x) = f(t1 + (1-t)0) \leq tf(1) + (1-t)f(0) = f(0) + t(f(1) - f(0)) = f(0) + t\alpha = f(0) + x\alpha,$$
ce qui donne $f(x) - f(0) \leq \alpha x$.
Ensuite, on pose $t = 1/(1+x)$. Alors $0 = tx + (1-t)(-1)$, et par convexité
$$f(0) = f(tx + (1-t)(-1)) \leq tf(x) + (1-t)f(-1) = \frac{1}{1+x}f(x) + \frac{x}{1+x}f(-1).$$
Ainsi $(1+x)f(0) \leq f(x) + xf(-1)$, soit $x\beta = x(f(0) - f(-1)) \leq f(x) - f(0)$.
2. D'après la partie 1. on a $\beta x \leq f(x) - f(0) \leq \alpha x$, d'où
$$0 = \lim_{x\to 0^+} \beta x \leq \lim_{x\to 0^+}(f(x) - f(0)) \leq \lim_{x\to 0^+} \alpha x = 0.$$
D'après le théorème des gendarmes, $\lim_{x\to 0^+}(f(x) - f(0))$ existe et vaut 0. Ainsi $\lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$.
3. On pose $g(x) = f(-x)$. Alors pour $x, y \in \mathbb{R}$ et $t \in [0,1]$ on a par convexité de f (pour $-x$ et $-y$) que
$$g(tx + (1-t)y) = f(t(-x) + (1-t)(-y)) \leq tf(-x) + (1-t)f(-y) = tg(x) + (1-t)g(y).$$
Ainsi g est convexe. D'après la partie 2. on a $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} g(x) = g(0) = f(-0) = f(0)$. Donc $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$ et f est continue en 0.
4. Soit $a \in \mathbb{R}$. On pose $h(x) = f(x+a)$. Alors pour $x, y \in \mathbb{R}$ et $\in [0,1]$ on a
$$h(tx+(1-t)y) = f(tx+(1-t)y+a) = f(t(x+a)+(1-t)(y+a)) \leq t(f(x+a)+(1-t)f(y+a) = th(x)+(1-t)h(y).$$
Ainsi h est convexe, et est continue en 0 d'après la partie 3. Ainsi f est continue en $-a$, pour tout $a \in \mathbb{R}$. Donc f est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4 : Dérivabilité.

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction, continue sur $\mathbb{R}_+$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, qui vérifie : $\lim_{x\to\infty} f(x) = f(0)$.

1. On suppose f non constante, et on note $x_0 > 0$ tel que $f(x_0) \neq f(0)$ et $y = (f(x_0) + f(0))/2$; montrer qu'il existe $a \in]0, x_0[$ tel que $f(a) = y$.
2. Montrer qu'il existe $b \in]x_0, x_1[$ tel que $f(b) = y$ (où x_1 est à définir).
3. Déduire des points précédents que f' a au moins un zéro dans $\mathbb{R}_+^*$.

Solution.

1. Puisque f est continue sur $[0, x_0]$, d'après le TVI pour tout z entre $f(0)$ et $f(x_0)$ il y a $x \in [0, x_0]$ avec $f(x) = z$. Puisque le milieu $y = (f(x_0) + f(0))/2$ est entre $f(0)$ et $f(x_0)$, il y a $a \in [0, x_0]$ avec $f(a) = y$. Or, puisque $f(0) \neq f(x_0)$ on a $f(0) \neq y \neq f(x_0)$, et donc $0 \neq a \neq x_0$. Ainsi $a \in]0, x_0[$.
2. Puisque $\lim_{x\to\infty} f(x) = f(0)$, il y a $x_1 > x_0$ tel que $|f(x_1) - f(0)| < \frac{1}{4}|f(0) - f(x_0)|$. Alors $f(x_1)$ est strictement entre y et $f(0)$, et donc y est strictement entre $f(x_0)$ et $f(x_1)$. D'après le TVI il y a $b \in [x_0, x_1]$ avec $f(b) = y$, et comme $f(x_0) \neq y \neq f(x_1)$ on a $b \in]x_0, x_1[$.
3. On a $f(a) = f(b)$ et f est dérivable sur $[a, b]$, avec $a < b$. D'après le théorème de Rolle il y a $c \in]a, b[$ avec $f'(c) = 0$, donc f' a un zéro dans $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 5 : Étude de fonctions.

On considère la fonction réelle : $x \mapsto x \arctan \frac{1}{x-1}$.

1. Donner le domaine de définition maximal.
2. Étudier la parité et la périodicité de f.
3. Étudier les éventuelles limites de f aux bornes de son domaine maximal.
4. Calculer la fonction dérivée de f.
5. Donner le tableau de variations de f.
6. Calculer ses asymptôtes éventuelles.
7. Dresser le graphe de f.

Solution.

1. On a $\mathrm{dom}\,(\arctan) = \mathbb{R}$. Ainsi $x \in \mathrm{dom}\,(f)$ ssi $\frac{1}{x-1}$ est bien défini. Le domaine maximal est donc $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.
2. On a $f(-1) = -\arctan(-\frac{1}{2}) = \arctan(\frac{1}{2})$, mais $f(1)$ n'est pas défini. Ainsi f est ni pair ni impair. De même, si $p > 0$ était une période, alors $f(1) = f(1+p)$, mais le deuxième est défini et le premier ne l'est pas. Donc f n'est pas périodique.
3. On a $\lim_{x\to 1^\pm} f(x) = \lim_{x\to 1^\pm} \arctan \frac{1}{x-1} = \lim_{y\to\pm\infty} \arctan(y) = \pm\frac{\pi}{2}$, avec $y = \frac{1}{x-1}$.
   On a $(\arctan \frac{1}{x-1})' = \frac{1}{1+(\frac{1}{x-1})^2} \frac{-1}{(x-1)^2} = \frac{-1}{(x-1)^2+1}$. D'après l'hôpital
$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\arctan \frac{1}{x-1}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(\arctan \frac{1}{x-1})'}{(\frac{1}{x})'} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{-1}{(x-1)^2+1}}{\frac{-1}{x^2}}$$
$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{(x-1)^2+1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{(1-\frac{1}{x})^2 + (\frac{1}{x})^2} = 1.$$
4. On a
$$f'(x) = \arctan \frac{1}{x-1} - \frac{x}{(x-1)^2+1}.$$
5. On a
$$f''(x) = \frac{-1}{(x-1)^2+1} - \frac{(x-1)^2+1-x2(x-1)}{((x-1)^2+1)^2} = -2\frac{(x-1)^2+1-x(x-1)}{((x-1)^2+1)^2} = 2\frac{(x-2)}{((x-1)^2+1)^2}.$$
   Ainsi

x	$-\infty$		0		1		2		∞
f''				$-$			0	$+$	
f'	0	$-$	$-\frac{\pi}{4}$	$-$	$-\frac{\pi}{2}-1 \mid \frac{\pi}{2}-1$	$+-$	$\frac{\pi}{4}-1$	$-$	0
f	1	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\frac{\pi}{2} \mid \frac{\pi}{2}$	$\nearrow\searrow$	$\frac{\pi}{2}-1$	$\searrow$	1

6. $\lim_{x\to 1^\pm} f(x)$ existe. Il n'y a donc pas d'asymptote verticale en 1.
   $\lim_{x\to\pm\infty} = 1$. Il y a donc une asymptote horizontale $y = 1$ en $\pm\infty$.