Mathématiques - CF Analyse 1

Documents et calculettes interdits

Exercice 1 : Les réels.

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

1. Pour $x \in \mathbb{R}$ justifier l'existence du réel $d(x, A) = \inf\{|x - a| : a \in A\}$, appelé la *distance* de x à A.
2. Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ on a $|d(x, A) - d(y, A)| \leq |x - y|$.
3. On rappelle que l'adhérence $\bar{X}$ d'une partie $X \subseteq \mathbb{R}$ est définie par
$$\bar{X} = \{x \in \mathbb{R} : \forall \epsilon > 0,\ ]x - \epsilon, x + \epsilon[\cap X \neq \emptyset\}.$$
Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $x \in \bar{A}$ si et seulement si $d(x, A) = 0$.

Exercice 2 : Suites.

Soit $(u_n)_n$ une suite réelle. On pose $v_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} u_k$. On suppose que $(u_n)_n$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$.

1. Pour tout $\epsilon > 0$, justifier qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n > n_0$ entraîne : $|u_n - l| \leq \epsilon/2$.
2. Montrer qu'il existe $n_1 > n_0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n > n_1$ entraîne : $\dfrac{|u_0 - l| + ... + |u_{n_0} - l|}{n+1} \leq \epsilon/2$.
3. En déduire que si $(u_n)_n$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, alors $(v_n)_n$ aussi.
4. Est-ce que la réciproque est vraie ? Justifier la réponse.
5. Est-ce que la partie 3. reste vraie si $\ell \in \pm\infty$? Justifier la réponse.
6. En déduire que si $(a_n)_n$ est une suite avec $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = \ell$, alors $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \ell$.

Exercice 3 : Continuité.

Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que l'on suppose convexe, c'est-à-dire : $f(tx + (1 - t)y) \leq tf(x) + (1 - t)f(y)$, pour tout $t \in [0, 1]$ et pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

On pose $\alpha = f(1) - f(0)$, $\beta = f(0) - f(-1)$ et $\gamma = \max\{|\alpha|, |\beta|\}$.

1. Soit $x \in]0, 1[$. Montrer que $\beta x \leq f(x) - f(0) \leq \alpha x$.
(Indication : Utiliser le fait que $x = t1 + (1-t)0$ avec $t = x$ et $0 = tx + (1-t)(-1)$, avec $t = 1/(1+x)$.)
2. En déduire que $\lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$.
3. Montrer que $\lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0)$. En déduire que f est continue en 0.
(Indication : On pourra montrer que $f(-x)$ est convexe.)
4. Montrer que f est continue en tout point de $\mathbb{R}$.
(Indication : Pour $a \in \mathbb{R}$, on pourra montrer que la fonction $x \mapsto g(x) = f(x + a)$ est convexe.)

Exercice 4 : Dérivabilité.

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction, continue sur $\mathbb{R}_+$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, qui vérifie : $\lim_{x\to\infty} f(x) = f(0)$.

1. On suppose f non constante, et on note $x_0 > 0$ tel que $f(x_0) \neq f(0)$ et $y = (f(x_0) + f(0))/2$; montrer qu'il existe $a \in]0, x_0[$ tel que $f(a) = y$.
2. Montrer qu'il existe $b \in]x_0, x_1[$ tel que $f(b) = y$ (où x_1 est à définir).
3. Déduire des points précédents que f' a au moins un zéro dans $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 5 : Étude de fonctions.

On considère la fonction réelle : $x \mapsto x \arctan \frac{1}{x-1}$.

1. Donner le domaine de définition maximal.
2. Étudier la parité et la périodicité de f.
3. Étudier les éventuelles limites de f aux bornes de son domaine maximal.
4. Calculer la fonction dérivée de f.
5. Donner le tableau de variations de f.
6. Calculer ses asymptôtes éventuelles.
7. Dresser le graphe de f.