

Mathématiques - CF Algèbre 1

Documents et calculatrices interdits

Exercice 1 : Logique.

1. Est-ce que les deux propositions suivantes sont équivalentes ? Justifier la réponse.

$$(a) \quad P \rightarrow (Q \rightarrow R) \quad \text{et} \quad (b) \quad (P \rightarrow Q) \rightarrow R.$$

2. Écrire en langage formel l'énoncé suivant :

Pour tout nombre premier il existe un nombre premier strictement plus grand.

Ensuite, écrire la négation de cet énoncé.

Attention : Il faut traduire *premier* en n'utilisant que l'addition et la multiplication.

3. On cherche à calculer la somme $S_n = \sum_{k=1}^{n^2} E(\sqrt{k})$, où $E(x)$ est la partie entière de x .

- (a) Montrer que

$$S_n = n + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=i^2}^{(i+1)^2-1} E(\sqrt{k}).$$

- (b) Conclure.

Exercice 2 : Relations et Applications.

1. Soient E un ensemble et $f : E \rightarrow E$ une application. On suppose que $f \circ f = f$ et que f est injective ou surjective. Montrer que $f = \text{id}_E$.
2. Soient E et F deux ensembles, $f : E \rightarrow F$ une application, $A \subseteq E$ et $B \subseteq F$. Montrer que

$$f[A \cap f^{-1}[B]] = f[A] \cap B.$$

3. Soient E un ensemble et $A \subseteq E$. On note f l'application $X \mapsto X \cap A$ de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathcal{P}(E)$.

- (a) Montrer que $X \sim X'$ ssi $f(X) = f(X')$ est une relation d'équivalence.

- (b) Montrer que $\mathcal{P}(A)$ est un ensemble de représentants des classes d'équivalence de $\sim$.

Exercice 3 : Les complexes.

1. Soit $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{U}$. On note f la fonction $z \mapsto \frac{z-a}{az-1}$. Montrer que f est définie sur $\mathbb{U}$, à valeurs dans $\mathbb{U}$, et que $f : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{U}$ est bijective. (Rappel : $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.)
2. Résoudre algébriquement dans $\mathbb{C}$ l'équation $2z^2 + (8 - 5i)z + (4 - 13i) = 0$.

Exercice 4 : Arithmétique.

1. Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $a, b \in \mathbb{Z}$, si $a \equiv b \pmod{n}$ alors $a^n \equiv b^n \pmod{n^2}$.
Indication : $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + \dots + b^{n-1})$.
2. Donner toutes les solutions dans $\mathbb{Z}$ du système de congruences

$$x \equiv 1 \pmod{597} \quad \text{et} \quad x \equiv 2 \pmod{322}.$$

3. Montrer que si $x^3 + y^3 + z^3$ est divisible par 7, xyz l'est aussi.

Exercice 5 : Polynômes.

1. Résoudre l'équation polynomiale $(X^2 + 1)P'' = P$, pour $P \in \mathbb{C}[X]$.
Indication : Poser $P(X) = \sum_{k=0}^d a_k X^k$, et obtenir des conditions sur les a_k .
2. Soient $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $d > 0$ et $a \in \mathbb{R}$. On suppose $P(a) > 0$ et $P^{(k)}(a) \geq 0$ pour tout $k \in \llbracket 1, d \rrbracket$. Montrer que P n'a pas de racine dans $[a, \infty[$.