Mathématiques - Algèbre 1 Session 2

Corrigé

Exercice 1 : Logique.

1. Est-ce que les deux propositions suivantes sont équivalentes ? Justifier la réponse.

$$(a)\quad P \to (Q \to R) \qquad \text{et} \qquad (b)\quad (R \to Q) \to P.$$

2. Calculer la somme $\displaystyle\sum_{1\leq i\leq j\leq n} \frac{i^2}{j}$.

Solution.

1. On écrit la table de vérité.

P	Q	R	$Q \to R$	$P \to (Q \to R)$	$R \to Q$	$(R \to Q) \to P$
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	F	V	V
V	F	V	V	V	F	V
V	F	F	V	V	V	V
F	V	V	V	V	V	F
F	V	F	F	V	V	F
F	F	V	V	V	F	V
F	F	F	V	V	V	F

La 5me et la 7me colonne étant différentes, les deux propositions ne sont pas équivalentes.

2. On a

$$\begin{aligned}\sum_{1\leq i\leq j\leq n} \frac{i^2}{j+1} &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} \frac{i^2}{j+1} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j+1} \sum_{i=1}^{j} i^2 = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j+1}\, \frac{j(j+1)(2j+1)}{6} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \frac{j(2j+1)}{6} = \sum_{j=1}^{n} \big(\frac{j^2}{3} + \frac{j}{6}\big) = \frac{1}{3}\, \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{1}{6}\, \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{n(n+1)}{36}(4n+5).\end{aligned}$$

Exercice 2 : Relations et Applications.

1. Soit E un ensemble et $f, g : E \to E$ deux applications. On suppose que $f \circ g$ est bijective, et que $f \circ g = g \circ f$. Montrer que f et g sont bijectives.
2. Soit E un ensembles et $f : E \to E$ une application. Sur $\mathcal{P}(E)$ on définit une relation $\prec$ par $X \prec Y$ s'il y a $n \in \mathbb{N}$ tel que $f^n[X] \subseteq Y$ (ici $f^n = f \circ \cdots \circ f$, n fois). Montrer que $\prec$ est réflexif et transitif. Est-ce une relation d'ordre ?

Solution.

1. On a
   — $f \circ g$ injective implique g injective.
   — $f \circ g$ surjective implique f surjective.
   — $g \circ f$ injective implique f injective.
   — $g \circ f$ surjective implique g surjective.
   Ainsi f est injective et surjective, donc bijective, et g également.
2. — Reflexivité : Soit $X \subseteq E$. Alors $f^0[X] = X \subseteq X$, donc $X \prec X$.

— Transitivité : Soient $X, Y, Z \subseteq E$ avec $X \prec Y$ et $Y \prec Z$. Donc il y a $m, n \in \mathbb{N}$ avec $f^m[X] \subseteq Y$ et $f^n[Y] \subseteq Z$. Ainsi $f^{m+n}[X] = f^n[f^m[X]] \subseteq f^n[Y] \subseteq Z$, et $X \prec Z$.

Ça dépend de f si $\prec$ est une relation d'ordre. Si par exemple f est id_E, alors $X \prec Y$ ssi $X \subseteq Y$ et $\prec$ est un ordre (partiel), puisque $\subseteq$ en est un. Par contre, si par exemple $E = \mathbb{C}$ et f est la conjugaison complexe, alors pour $X = \{i\}$ et $Y = \{-i\}$ on a $f[X] = Y$ et $f[Y] = X$, donc $X \prec Y$ et $Y \prec X$, mais $X \neq Y$. Donc dans ce cas $\prec$ n'est pas une relation d'ordre.

Exercice 3 : Les complexes.

1. Résoudre algébriquement dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - (5-i)z + (8-i) = 0$.
2. Déterminer la nature de la similitude directe $z \mapsto (3+i)z + (5-2i)$. (Il n'est pas nécessaire de calculer la valeur numérique de l'angle.)

Solution.

1. Le discriminant est $\Delta = (5-i)^2 - 4(8-i) = 25 - 1 - 10i - 32 + 4i = -8 - 6i$. On pose $\delta = a + ib$ avec $\delta^2 = \Delta$. Alors
$$a^2 - b^2 = \mathrm{Re}(\Delta) = -8, \qquad 2ab = \mathrm{Im}(\Delta) = -6, \qquad a^2 + b^2 = |\delta|^2 = |\Delta| = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{100} = 10.$$
Ceci donne $2a^2 = -8 + 10 = 2$ et $a = \pm 1$. Alors $b = \frac{-6}{2a} = \mp 3$, et $\delta = \pm(1 - 3i)$. Alors
$$z = \frac{5 - i \pm (1 - 3i)}{2} \in \{3 - 2i, 2 + i\}.$$
2. On calcule le point fixe : $z = f(z) = (3+i)z + (5-2i)$, donc $(2+i)z = 2i - 5$ et
$$z = \frac{2i-5}{2+i} = \frac{(2i-5)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{-8+9i}{5}.$$
On a $|3+i| = \sqrt{10}$. Ainsi il s'agit d'une homothétie de centre le point d'affixe $\frac{-8+9i}{5}$, de rapport $\sqrt{10}$ et d'angle $\arg(3+i)$.

Exercice 4 : Arithmétique.
Donner toutes les solutions dans $\mathbb{Z}$ du système de congruences
$$x \equiv -6 \mod 221 \quad \textit{et} \quad x \equiv 7 \mod 273.$$

Solution. Les deux congruences donnent l'existence d'$y, z \in \mathbb{Z}$ avec $221y - 6 = x = 273z + 7$. Il faut donc résoudre l'équation diophantienne
$$221y - 273z = 13.$$
On calcule le $\mathrm{pgcd}(273, 221)$. On a
$$\begin{aligned} 273 &= 221 + 52 \\ 221 &= 52 \cdot 4 + 13 \\ 52 &= 13 \cdot 4 + 0. \end{aligned}$$
Donc le pgcd vaut 13. Puisque $13 \mid 13$, il y a des solutions. Remonte l'algorithme m'Euclide :
$$13 = 221 - 4 \cdot 52 = 221 - 4 \cdot (273 - 221) = 5 \cdot 221 - 4 \cdot 273.$$
On a une solution particulière $(y_0, z_0) = (5, 4)$. On divise l'équation par 13 :
$$17y - 21z = 1 \qquad \text{et} \qquad 17 \cdot 5 - 21 \cdot 4 = 1.$$
En soustrayant on obtient $17(y-5) = 21(z-4)$. Puisque 17 et 21 sont premiers entre eux, le lemme de Gauss implique qu'il y ait $k \in \mathbb{Z}$ avec $y - 5 = 21k$, et donc $x = 221y - 6 = 221(21k+5) - 6 = 13 \cdot 17 \cdot 21k + 1099$, avec $k \in \mathbb{Z}$. On vérifie facilement que ces entiers satisfont le système des congruences.

Exercice 5 : Polynômes.
Soient $a \in \mathbb{C}^\times$, et $p > 0$ entier. Montrer que si $P(X) = (X-a)^p$ est à coefficients dans $\mathbb{Q}$, alors $a \in \mathbb{Q}$.
Indication : Calculer $\mathrm{pgcd}(P, P')$.

Solution. On fait une récurrence sur p. Si $p = 1$, alors $X - a \in \mathbb{Q}[X]$, ce qui signifie $a \in \mathbb{Q}$. Supposons donc l'énonce vrai pour p, et considérons $P(X) = (X-a)^{p+1} \in \mathbb{Q}[X]$. Alors $P' = (p+1)(X-a)^p$, et $\mathrm{pgcd}((X-a)^{p+1}, (p+1)(X-a)^p) = (X-a)^p \in \mathbb{Q}[X]$. Par hypothèse de récureence $a \in \mathbb{Q}$.