
Mathématiques - Algèbre 1 Session 2
Documents et calculatrices interdits

Exercice 1 : Logique.

1. Est-ce que les deux propositions suivantes sont équivalentes ? Justifier la réponse.

$$(a) \quad P \rightarrow (Q \rightarrow R) \quad \text{et} \quad (b) \quad (R \rightarrow Q) \rightarrow P.$$

2. Calculer la somme $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{i^2}{j+1}$.

Exercice 2 : Relations et Applications.

1. Soit E un ensemble et $f, g : E \rightarrow E$ deux applications. On suppose que $f \circ g$ est bijective, et que $f \circ g = g \circ f$. Montrer que f et g sont bijectives.
2. Soit E un ensemble et $f : E \rightarrow E$ une application. Sur $\mathcal{P}(E)$ on définit une relation \prec par $X \prec Y$ s'il y a $n \in \mathbb{N}$ tel que $f^n[X] \subseteq Y$ (ici $f^n = f \circ \dots \circ f$, n fois). Montrer que \prec est réflexif et transitif. Est-ce une relation d'ordre ?

Exercice 3 : Les complexes.

1. Résoudre algébriquement dans \mathbb{C} l'équation $z^2 - (5 - i)z + (8 - i) = 0$.
2. Déterminer la nature de la similitude directe $z \mapsto (3 + i)z + (5 - 2i)$. (Il n'est pas nécessaire de calculer la valeur numérique de l'angle.)

Exercice 4 : Arithmétique.

Donner toutes les solutions dans \mathbb{Z} du système de congruences

$$x \equiv -6 \pmod{221} \quad \text{et} \quad x \equiv 7 \pmod{273}.$$

Exercice 5 : Polynômes.

Soient $a \in \mathbb{C}^\times$ et $p > 0$ entier. Montrer que si $P(X) = (X - a)^p$ est à coefficients dans \mathbb{Q} , alors $a \in \mathbb{Q}$.

Indication : Calculer $\text{pgcd}(P, P')$.