Feuille 2 : Fonctions et fonctions usuelles

Exercice 1 (Injection, surjection, bijection)**.**
Les fonctions suivantes sont-elles des injections ? Des surjections ? Des bijections ?

1. $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f_1(x) = x^2 + 1$.
2. $f_2 : \mathbb{R} \to [1, +\infty[$ définie par $f_2(x) = x^2 + 1$
3. $f_3 : [-4, -2] \cup [0, 1] \to [1, +\infty[$, définie par $f_3(x) = x^2 + 1$.
4. $f_4 : \mathbb{R}\setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \to \mathbb{R}$, définie par $f_4(x) = \tan(x)$.
5. $f_5 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{+*}$ définie par $f_5(x) = e^x$.
6. $f_6 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{+*}$ définie par $f_6(x) = e^{x^2}$.

Exercice 2 (Trinôme)**.**
Soient $a \neq 0$, b et c trois réels. On note $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$.

1. Rappeler les variations de f en fonction du signe de a.
2. Comment s'appelle la courbe représentative de f ? Quelle propriété de symétrie possède-t-elle ? Comment cette symétrie se traduit-elle algébriquement ?
3. Étudier le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.
4. Tracer sur le même graphique une courbe représentative des fonctions $f : x \mapsto x^2$ et $g : x \mapsto \sqrt{x}$, toutes deux définies sur $\mathbb{R}^+$. Pourquoi ces deux courbes sont-elles symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$?

Exercice 3 (Partie entière)**.**
On rappelle que l'on note $E(x)$ la partie entière d'un réel x.

1. Quelle est l'image de $\mathbb{R}$ par la fonction partie entière ?
2. Combien vaut $E(0.5)$? Et $E(-1.5)$?
3. Tracer les courbes représentatives des fonctions $x \mapsto E(x)$, $x \mapsto E(2x)$ et $x \mapsto E(x/2)$.

Exercice 4 (Trigo)**.** Calculer les valeurs suivantes :

1. $\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)$
2. $\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$
3. $\tan\left(-\frac{11\pi}{4}\right)$
4. $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$
5. $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

Exercice 5 (Trigo - encore)**.**
Soient x et y deux réels.

1. Exprimer les réels $\cos(x + y)$, $\cos(2x)$, $\sin(x + y)$ et $\sin(2x)$ en fonction de $\cos x$, $\sin x$, $\cos y$ et $\sin x$.
2. Montrer que $1 + \sin x = \left(\cos\left(\frac{x}{2}\right) + \sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2$.
3. Exprimer les réels $\cos(4x)$ et $\sin(4x)$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$.
4. Exprimer en fonction de $\tan x$ seulement les expressions suivantes :
   (a) $f_1(x) = \cos^2 x$
   (b) $f_2(x) = \dfrac{\sin^4 x + \cos^4 x}{\sin^4 x - \cos^4 x}$
   (c) $f_3(x) = \dfrac{\sin^3 x - \cos^3 x}{\sin x - \cos x}$
   (d) $f_4(x) = \cos^2 x - \sin x \cos x$.

Exercice 6 (Trigo - toujours !)**.**

1. Rappeler les formules d'addition de $\sin(a + b)$ et $\cos(a + b)$.
2. Résoudre l'équation, d'inconnue x : $\sin x = \dfrac{1}{2}$.

3. Montrer qu'il existe un réel θ tel que, pour tout réel y, $\sin(y+\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin y + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos y$.
4. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation, d'inconnue y :

$$\sin y + \cos y = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Exercice 7 (Composition)**.**

1. Soient I, J et K des parties de $\mathbb{R}$ et $f : J \to K$ et $g : I \to J$. Montrer que si f et g sont toutes les deux monotones, alors $f \circ g$ est également monotone. Pouvez-vous préciser son sens de variation en fonction de ceux de f et de g ?
2. Écrire les fonctions suivantes comme la composée de deux fonctions et en déduire leur sens de variation.

   (a) $x \mapsto (1+2x)^2$; (b) $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$; (c) $x \mapsto \exp(x^2-1)$.

Exercice 8 (Image directe, image réciproque)**.**
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction $x \mapsto x^2$, et E la fonction partie entière.
Déterminer les ensembles suivants :

1. $f([0,3])$.
2. $f^{-1}([0,4])$
3. $f^{-1}([-1,4])$
4. $f^{-1}([\sqrt{2},4])$
5. $\sin([0,\pi]$
6. $\sin^{-1}(\{0.5\})$
7. $\sin^{-1}([-0.5,0.5])$
8. $\tan^{-1}([-1,1])$.
9. $E([-1.5,1.5])$.
10. $E^{-1}([-1,1] \cup \{2\})$.

Exercice 9 (Réciproque de fonctions circulaires)**.**

1. Soit $f = \cos|_{[2\pi,3\pi]}$, la restriction de la fonction cosinus à l'intervalle $[2\pi, 3\pi]$.
   Exprimer $f^{-1} : [-1,1] \to [2\pi, 3\pi]$ en utilisant les fonctions arccos et/ou arcsin.
2. Soit $g = \cos|_{[\pi,2\pi]}$, la restriction de la fonction cosinus à l'intervalle $[\pi, 2\pi]$.
   Exprimer $g^{-1} : [-1,1] \to [\pi, 2\pi]$ en utilisant les fonctions arccos et/ou arcsin.

Exercice 10 (Réciproque de fonctions circulaires : Calcul)**.**
Calculez les valeurs suivantes :

1. $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)$.
2. $\arcsin\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$
3. $\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$
4. $\arctan(-1)$
5. $\arcsin\left(\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$
6. $\arctan\left(\tan\left(\frac{9\pi}{4}\right)\right)$
7. $\sin\left(\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right)\right)$
8. $\tan(\arctan(3))$.

Exercice 11 (Dérivée)**.**
Calculer là où cela est possible les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f_1 : x \mapsto \sin^2 x$
2. $f_2 : x \mapsto \sin(x^2)$
3. $f_3 : x \mapsto \cos^2(3x)$
4. $f_4 : x \mapsto \tan(x^2)$
5. $f_5 : x \mapsto \dfrac{1-x}{2+x}$
6. $f_6 : x \mapsto \sqrt{1-x^2}$
7. $f_7 : x \mapsto e^{2x+1}$
8. $f_8 : x \mapsto \ln(1+x^4)$
9. $f_9 : x \mapsto \ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|$
10. $f_{10} : x \mapsto \ln|\cos x|$

Exercice 12 (Fonctions hyperboliques)**.**
Montrer que pour tous réels u et v, on a :

$$\cosh^2 u + \sinh^2 v = \sinh^2 u + \cosh^2 v = \cosh(u+v)\cosh(u-v)$$
$$\cosh^2 u - \cosh^2 v = \sinh^2 u - \sinh^2 v = \sinh(u+v)\sinh(u-v)$$

Exercice 13 (Équation - Fonctions hyperboliques)**.**

1. Calculer $\cosh\left(\frac{1}{2}\ln(3)\right)$ et $\sinh\left(\frac{1}{2}\ln(3)\right)$.

2. À l'aide de la formule de calcul du $\cosh(a+b)$, résoudre l'équation d'inconnue réelle x :

$$\frac{2}{\sqrt{3}}\cosh x + \frac{1}{\sqrt{3}}\sinh x = \cosh(5x).$$

Exercice 14 (Limite - exp)**.**

1. Discuter en fonction de la valeur du réel a l'existence et la valeur éventuelle de la limite de a^n quand n tend vers $+\infty$.
2. À quelle condition la fonction $x \mapsto a^x$ est-elle bien définie sur $\mathbb{R}$? Que pouvez-vous dire dans ce cas de la limite de a^x lorsque x tend ers $+\infty$?

Exercice 15 (Limites - Opérations)**.**
Calculer, si elles existent les limites quand x tend vers $+\infty$ de :

1. $f_1 : x \mapsto \dfrac{x^2+2x^5}{1+x^4}$
2. $f_2 : x \mapsto \dfrac{x\sin x + x^2}{1+x^2}$
3. $f_3 : x \mapsto \dfrac{x\sqrt{x}+5}{x^2+\cos x}$
4. $f_4 : x \mapsto \sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}$
5. $f_5 : x \mapsto \dfrac{1}{x}\ln(2x+3)$
6. $f_6 : x \mapsto \sin\dfrac{1}{x}$
7. $f_7 : x \mapsto x+\cos x$
8. $f_8 : x \mapsto e^{-x}(\cosh^3 x - \sinh^3 x)$
9. $f_9 : x \mapsto x - \ln(\cosh x)$.

Exercice 16 (Fonction réciproque - Dérivée)**.**

1. Montrer que pour tout y réel il existe un unique x réel tel que $y = \sinh(x)$, et exprimer x en fonction de y. sinh est donc une bijection $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, on note sa bijection réciproque argsinh.
2. Calculer la dérivée de argsinh.

Exercice 17 (Fonction réciproque - Dérivée)**.** Donner les dérivées des fonctions suivantes définies par :

1. $x \mapsto \arccos(\cos(x))$
2. $x \mapsto \arcsin(\sin(x))$
3. $x \mapsto \arcsin(\cos(x))$
4. $x \mapsto \arccos(\sin(x))$
5. $x \mapsto \arctan(\tan(x))$
6. $x \mapsto \arctan(\sin(x))$