Université Claude Bernard Lyon 1 UE Analyse 1 pour informaticiens
Semestre d'automne 2023-2024

Contrôle terminal

Vendredi 22 décembre 2023 – Durée : 2h.

Les documents et appareils électroniques ne sont pas autorisés. La notation tiendra compte du soin apporté à la rédaction des réponses.

Exercice 1 : On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2)}{x^2} & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ 1 + \sinh(\sqrt{x}) & \text{si } x > 0 \end{cases}.$$

1. Justifier que f est bien définie sur $\mathbb{R}$.

   Solution: La fonction $x \mapsto \sin(x)$ est bien définie sur $\mathbb{R}$ et la fonction $x \mapsto x^2$ ne s'annule pas sur $]-\infty, 0[$, donc f est bien définie sur $]-\infty, 0[$. De plus la fonction $x \mapsto \sinh(x)$ est bien définie sur $\mathbb{R}$ alors que la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est bien définie sur $[0, +\infty[$, donc f est bien définie sur $]0, +\infty[$. f est donc bien définie sur $\mathbb{R}$.

2. Etudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.

   Solution: f est continue sur $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ car composée de fonctions continues. De plus

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\sin(x^2)}{x^2} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin(x^2) - 0}{x^2 - 0} = \sin'(0) = \cos(0) = 1,$$

   et

$$\lim_{x\to 0^+} (1 + \sinh(\sqrt{x})) = 1 + \lim_{x\to 0^+} \sinh(\sqrt{x}) = 1,$$

   puisque $\lim_{x\to 0} \sqrt{x} = 0$ et $\lim_{y\to 0} \sinh(y) = 0$. f est donc continue en 0, et donc continue sur $\mathbb{R}$.

3. Calculer, si elles existent, les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.

   Solution: On a d'une part $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$ et $\lim_{y\to+\infty} \sinh(y) = +\infty$, donc

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

   D'autre part, puisque que l'on a l'encadrement, pour tout $x < 0$,

$$-\frac{1}{x^2} \leq \frac{\sin(x^2)}{x^2} \leq \frac{1}{x^2},$$

   on a

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

Exercice 2 : Parmi les assertions suivantes, lesquelles sont vraies ? Justifier chaque réponse.

1. $\frac{(-1)^n}{1+n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

   Solution: Vrai. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$-\frac{1}{1+n^2} \leq \frac{(-1)^n}{1+n^2} \leq \frac{1}{1+n^2},$$

   et donc $\frac{(-1)^n}{1+n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par encadrement, puisque $\frac{1}{1+n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

2. $\frac{(1-n)^3}{1+\ln(n)+n^2+2n^3} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$.

Solution: Faux. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{(1-n)^3}{1+\ln(n)+n^2+2n^3} = \frac{-\left(1-\frac{1}{n}\right)^3}{2+\frac{1}{n^2}+\frac{\ln(n)}{n}+\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\frac{1}{2},$$

par croissance comparée.

3. $2^{n+1}+\cos(n) = \underset{n\to+\infty}{O}(2^n)$.

   Solution: Vrai. On a

$$\frac{2^{n+1}+\cos(n)}{2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2},$$

   puisque $|\cos(n)| \leq 1$ et $2^n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$. La suite $\left(\frac{2^{n+1}+\cos(n)}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc bien bornée.

4. Pour $k \in \mathbb{N}^*$ fixé, $(n+1)^k = \underset{n\to+\infty}{O}(n^k)$.

   Solution: Vrai. On a

$$\frac{(n+1)^k}{n^k} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^k \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1,$$

   La suite $\left(\frac{(n+1)^k}{n^k}\right)_{n\geq 1}$ est donc bien bornée.

Exercice 3 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par la donnée de u_0 et u_1 et par la relation de récurrence

$$2u_{n+2} - u_{n+1} - u_n = 0.$$

On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = u_{n+1} - u_n \quad \text{et} \quad w_n = 2u_{n+1} + u_n.$$

1. Calculer $2v_{n+1} + v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique, et exprimer v_n en fonction de n, u_0 et u_1.

   Solution: On a

$$2v_{n+1} + v_n = 2(u_{n+2} - u_{n+1}) + u_{n+1} - u_n = 2u_{n+2} - u_{n+1} + u_n = 0,$$

   et donc $v_{n+1} = -\frac{1}{2}v_n$, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $-\frac{1}{2}$. Ainsi

$$v_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n v_0 = \left(-\frac{1}{2}\right)^n (u_1 - u_0).$$

2. Calculer $w_{n+1} - w_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Que peut-on en déduire ? Exprimer w_n en fonction de n, u_0 et u_1.

   Solution: On a

$$w_{n+1} - w_n = 2u_{n+2} + u_{n+1} - (2u_{n+1} + u_n) = 2u_{n+2} - u_{n+1} + u_n = 0,$$

   et donc la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante. On en déduit

$$w_n = w_0 = 2u_1 + u_0.$$

3. En calculant $-2v_n + w_n$ de deux manières différentes exprimer u_n en fonction de n, u_0 et u_1.

   Solution: On a d'une part

$$-2v_n + w_n = -2(u_{n+1} - u_n) + 2u_{n+1} + u_n = 3u_n,$$

   et d'autre part

$$-2v_n + w_n = -2\left(-\frac{1}{2}\right)^n (u_1 - u_0) + 2u_1 + u_0.$$

On en déduit

$$u_n = -\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n (u_1 - u_0) + \frac{1}{3}(2u_1 + u_0).$$

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on définit $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$S_n = -\frac{4}{9}(u_1 - u_0)\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) + \frac{n+1}{3}(2u_1 + u_0).$$

Solution: On a

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n} u_k \\ &= -\frac{2}{3}(u_1 - u_0)\sum_{k=0}^{n}\left(-\frac{1}{2}\right)^k + \frac{1}{3}(2u_1 + u_0)\sum_{k=0}^{n} 1 \\ &= -\frac{2}{3}(u_1 - u_0)\frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} + \frac{n+1}{3}(2u_1 + u_0) \\ &= -\frac{4}{9}(u_1 - u_0)\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) + \frac{n+1}{3}(2u_1 + u_0). \end{aligned}$$

5. Sous quelle condition sur les valeurs de u_0 et u_1 la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet-elle une limite finie ? Dans ce cas exprimer cette limite en fonction de u_0 et u_1.

Solution: D'une part l'encadrement

$$-\frac{1}{2^{n+1}} \leq \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} \leq \frac{1}{2^{n+1}}$$

implique $\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et donc

$$-\frac{4}{9}(u_1 - u_0)\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\frac{4}{9}(u_1 - u_0).$$

D'autre part, si $2u_1 + u_0 > 0$ on a $\frac{n+1}{3}(2u_1 + u_0) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et donc $S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, alors que si $2u_1 + u_0 < 0$ on a $\frac{n+1}{3}(2u_1 + u_0) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$ et donc $S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$. Ainsi $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite finie si et seulement si $2u_1 = -u_0$, et dans ce cas on a

$$S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\frac{4}{9}(u_1 - u_0) = \frac{2}{3}u_0.$$

Exercice 4 : 1. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ par

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}.$$

(a) Que valent $\lim_{x \to +\infty} f(x)$, $\lim_{x \to -\infty} f(x)$, $\lim_{x \to 1^-} f(x)$ et $\lim_{x \to 1^+} f(x)$?

Solution: On a

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty.$$

(b) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et déterminer la table de variation de f sur $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Solution: Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$,

$$f'(x) = \frac{2x(x-1)-(x^2+1)}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}.$$

Le discriminant du trinôme x^2-2x-1 est $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 8$, et donc ses deux racines sont $x_1 = \frac{2+\sqrt{8}}{2} = 1+\sqrt{2}$ et $x_1 = \frac{2-\sqrt{8}}{2} = 1-\sqrt{2}$. Comme

$$f(1-\sqrt{2}) = \frac{(1+\sqrt{2})^2+1}{\sqrt{2}} = 2(1+\sqrt{2}) \quad \text{et} \quad f(1-\sqrt{2}) = \frac{(1-\sqrt{2})^2+1}{-\sqrt{2}} = 2(1-\sqrt{2}),$$

on en déduit la table de variations

	$-\infty$		$1-\sqrt{2}$		1		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	-	N/A	-	0	$+$	
$f(x)$		$-\infty \nearrow$	$2(1-\sqrt{2})$	$\searrow -\infty$		$+\infty \searrow$	$2(1+\sqrt{2})$	$\nearrow +\infty$	

(c) En déduire $f(]1,+\infty[)$, $f(]-\infty,1[)$ et $f(\mathbb{R} \setminus \{1\})$

Solution: f est continue sur $]1,+\infty[$, et d'après les questions précédentes admet sur cet intervalle comme minimum $2(1+\sqrt{2})$ et tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$. On en déduit que $f(]1,+\infty[) = [2(1+\sqrt{2}),+\infty[$. A l'aide d'un raisonnement similaire on obtient $f(]-\infty,1[) =]-\infty,2(1-\sqrt{2})]$, et donc

$$f(\mathbb{R} \setminus \{1\}) =]-\infty, 2(1-\sqrt{2})] \cup [2(1+\sqrt{2}),+\infty[.$$

(d) Déterminer le signe de $f(x)-x$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Solution: Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ on a

$$f(x) - x = \frac{x^2+1-x(x-1)}{x-1} = \frac{x+1}{x-1}.$$

On en déduit le tableau de signes suivant :

	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$x+1$		-	0	$+$		$+$	
$x+1$		-		-	0	$+$	
$f(x)-x$		$+$	0	-	N/A	$+$	

2. On considère un réel $a \neq 1$ et la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = a$ et par la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \frac{u_n^2+1}{u_n-1}.$$

(a) Justifier que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie.

Solution: D'après une question précédente, $-1 \notin f(\mathbb{R} \setminus \{1\})$, et donc comme $u_0 \neq 1$, u_1 est bien défini et $u_1 = f(u_0) \neq 1$. Soit maintenant $n \in \mathbb{N}$. Supposons que u_n est bien définie et $u_n \neq 1$. Alors u_{n+1} est bien défini et $u_{n+1} = f(u_n) \neq 1$. On a ainsi bien montré par recurrence que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.

(b) On suppose que $a > 1$. Montrer que $u_n \geq 2(1+\sqrt{2})$ pour tout $n \geq 1$.

Solution: Comme $u_0 = a > 1$, on a $u_1 = f(u_0) \in f(]1,+\infty[) = [2(1+\sqrt{2}),+\infty[$, donc $u_1 \geq 2(1+\sqrt{2})$. Soit maintenant $n \geq 1$. Supposons que $u_n \geq 2(1+\sqrt{2})$. Alors $u_{n+1} = f(u_n) \in f(]1,+\infty[) = [2(1+\sqrt{2}),+\infty[$, donc $u_{n+1} \geq 2(1+\sqrt{2})$. On a bien montré par récurrence que $u_n \geq 2(1+\sqrt{2})$ pour tout $n \geq 1$.

(c) On suppose que $a > 1$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Déterminer sa limite.

Solution: D'après la question précédente on a $u_n \geq 2(1+\sqrt{2}) > 1$ pour tout $n \geq 1$, et donc comme $u_0 > 1$ on a $u_n > 1$ pour tout $n \geq 0$. Mais alors, pour tout $n \geq 0$,

$$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n \geq 0,$$

puisque $f(x) - x \geq 0$ pour tout $x > 1$ d'après une question précédente. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donc est croissante. Il y a donc deux possibilités, soit elle diverge vers $+\infty$, soit elle converge vers n réel ℓ. Supposons qu'elle converge vers un réel ℓ. Comme f est continue sur $]1,+\infty[$ on obtient, en passant à la limite,

$$\ell = \frac{\ell^2+1}{\ell-1} \quad \Longleftrightarrow \quad \ell = -1.$$

C'est absurde, puisque $u_n > 1$ pour tout $n \geq 0$. On en déduit que u_n diverge vers $+\infty$.