Université Claude Bernard Lyon 1 — UE Analyse 1 pour informaticiens
Semestre d'automne 2023-2024

Contrôle terminal

Vendredi 22 décembre 2023 – Durée : 2h.

Les documents et appareils électroniques ne sont pas autorisés. La notation tiendra compte du soin apporté à la rédaction des réponses.

Exercice 1 : On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2)}{x^2} & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ 1 + \sinh(\sqrt{x}) & \text{si } x > 0 \end{cases}.$$

1. Justifier que f est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. Etudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.
3. Calculer, si elles existent, les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.

Exercice 2 : Parmi les assertions suivantes, lesquelles sont vraies ? Justifier chaque réponse.

1. $\frac{(-1)^n}{1+n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
2. $\frac{(1-n)^3}{1+\ln(n)+n^2+2n^3} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$.
3. $2^{n+1} + \cos(n) = \underset{n\to+\infty}{O}(2^n)$.
4. Pour $k \in \mathbb{N}^*$ fixé, $(n+1)^k = \underset{n\to+\infty}{O}(n^k)$.

Exercice 3 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par la donnée de u_0 et u_1 et par la relation de récurrence

$$2u_{n+2} - u_{n+1} - u_n = 0.$$

On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = u_{n+1} - u_n \quad \text{et} \quad w_n = 2u_{n+1} + u_n.$$

1. Calculer $2v_{n+1} + v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique, et exprimer v_n en fonction de n, u_0 et u_1.
2. Calculer $w_{n+1} - w_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Que peut-on en déduire ? Exprimer w_n en fonction de n, u_0 et u_1.
3. En calculant $-2v_n + w_n$ de deux manières différentes exprimer u_n en fonction de n, u_0 et u_1.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on définit $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$S_n = -\frac{4}{9}(u_1 - u_0)\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) + \frac{n+1}{3}(2u_1 + u_0).$$

5. Sous quelle condition sur les valeurs de u_0 et u_1 la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet-elle une limite finie ? Dans ce cas exprimer cette limite en fonction de u_0 et u_1.

Exercice 4 : 1. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ par

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1}.$$

(a) Que valent $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ et $\lim_{x\to 1^+} f(x)$?

(b) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et déterminer la table de variation de f sur $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

(c) En déduire $f(]1, +\infty[)$, $f(] - \infty, 1[)$ et $f(\mathbb{R} \setminus \{1\})$

(d) Déterminer le signe de $f(x) - x$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

2. On considère un réel $a \neq 1$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = a$ et par la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 1}{u_n - 1}.$$

(a) Justifier que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.

(b) On suppose que $a > 1$. Montrer que $u_n \geq 2(1 + \sqrt{2})$ pour tout $n \geq 1$.

(c) On suppose que $a > 1$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Déterminer sa limite.