Université Claude Bernard Lyon 1 — UE Analyse 1 pour informaticiens
Semestre d'automne 2023-2024

Contrôle partiel n°2

Lundi 27 novembre 2023 – Durée : 1h.

Les documents et appareils électroniques ne sont pas autorisés. La notation tiendra compte du soin apporté à la rédaction des réponses.

Exercice 1 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et ℓ un réel. Donner la définition de «$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ».

Solution: $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \Rightarrow |u_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

Exercice 2 : Pour chacune des fonctions suivantes, préciser son domaine de définition et calculer sa dérivée.

$$f(x) = \frac{\exp(x) - x}{1 + x^2},$$

$$g(x) = \ln(1 + \sin^4(x)).$$

Solution: Comme $1 + x^2 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $x \mapsto \exp(x)$ est définie sur $\mathbb{R}$, la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$. De plus on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \frac{(e^x - 1)(1 + x^2) - (e^x - x)2x}{(1 + x^2)^2} = \frac{x^2 - 1 + e^x(1 - x)^2}{(1 + x^2)^2}.$$

D'autre part, comme $1 + \sin^4(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $x \mapsto \ln(x)$ est définie sur $]0, +\infty[$, la fonction g est définie sur $\mathbb{R}$. On obtient, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g'(x) = \frac{4\cos(x)\sin^3(x)}{1 + \sin^4(x)}.$$

Exercice 3 : Classer les suites de termes généraux suivants par ordre de «négligeabilité».

$$a_n = \sqrt{n!}, \quad b_n = \ln(n)n^5, \quad c_n = \exp(n).$$

Solution: Tout d'abord on a $\frac{a_n}{c_n} = \frac{e^n}{\sqrt{n!}} = \sqrt{\frac{e^{2n}}{n!}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $a_n = \underset{n\to+\infty}{o}(c_n)$. Ensuite $\frac{b_n}{a_n} = \frac{\ln(n)n^5}{e^n} = \frac{\ln(n)}{e^{n/2}}\frac{n^5}{e^{n/2}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $b_n = \underset{n\to+\infty}{o}(a_n)$.

Exercice 4 : Démontrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ données ci-dessous sont adjacentes.

$$u_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}, \quad v_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}.$$

Solution: Remarquons d'abord que pour tout $n \geq 1$ on a

$$v_n - u_n = \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

De plus, pour tout $n \geq 1$,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2n+1} > 0,$$

donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante. Enfin, pour tout $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n} &= \frac{n(2n+1) + n(2n+2) - (2n+1)(2n+2)}{n(2n+1)(2n+2)} \\ &= -\frac{3n+2}{n(2n+1)(2n+2)} < 0. \end{aligned}$$

Donc la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante. Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont donc adjacentes.

Exercice 5 : On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} = \frac{n}{n^2+1} e^{-u_n}.$$

1. Montrer que $u_n \geq 0$ pour tout $n \geq 1$.

   Solution: Comme $e^{-x} > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $e^{-u_n} > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc $u_n = \frac{n-1}{(n-1)^2+1} e^{-u_{n-1}} \geq 0$ pour tout $n \geq 1$.

2. Déterminer la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque n tend vers $+\infty$

   Solution: Comme $e^{-x} \leq 1$ pour tout $x \geq 0$, on a pour tout $n \geq 1$, d'après la question précédente,

   $$0 \leq u_n \leq \frac{n}{n^2+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

   On en déduit que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.