Université Claude Bernard Lyon 1 — UE Analyse 1 pour informaticiens
Semestre d'automne 2023-2024

Contrôle partiel n°2

Lundi 27 novembre 2023 – Durée : 1h.

Les documents et appareils électroniques ne sont pas autorisés. La notation tiendra compte du soin apporté à la rédaction des réponses.

Exercice 1 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et ℓ un réel. Donner la définition de «$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ».

Exercice 2 : Pour chacune des fonctions suivantes, préciser son domaine de définition et calculer sa dérivée.

$$f(x) = \frac{\exp(x) - x}{1 + x^2},$$

$$g(x) = \ln(1 + \sin^4(x)).$$

Exercice 3 : Classer les suites de termes généraux suivants par ordre de «négligeabilité».

$$a_n = \sqrt{n!}, \quad b_n = \ln(n)n^5, \quad c_n = \exp(n).$$

Exercice 4 : Démontrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ données ci-dessous sont adjacentes.

$$u_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}, \quad v_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}.$$

Exercice 5 : On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} = \frac{n}{n^2+1} e^{-u_n}.$$

1. Montrer que $u_n \geq 0$ pour tout $n \geq 1$.
2. Déterminer la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque n tend vers $+\infty$