Université Claude Bernard Lyon 1 UE Analyse 1 pour informaticiens
Semestre d'automne 2023-2024

Contrôle partiel n°1

Lundi 16 octobre 2022 – Durée : 1h.

Les documents, les téléphones et les calculatrices ne sont pas autorisés. La notation tiendra compte du soin apporté à la rédaction des réponses.

Exercice 1 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et T un réel strictement positif. Donner la définition de « f est périodique de période T ».

Solution: f est périodique de période T si et seulement si

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+T) = f(x).$$

Exercice 2 : Soient $B =]-10, 2[\cup]0, 3]$, $C = [-12, 1[$ et $D = \{4\}$. L'ensemble $A = D \cup (B \cap C)$

1. est-il majoré ? minoré ? Si tel est le cas, donner un majorant et/ou un minorant de A.
2. admet-il un minimum ? un maximum ? Si tel est le cas, donner le maximum et/ou le minimum de A.

Solution: On commence par remarquer que $A =]-10, 1[\cup \{4\}$, et ainsi :

1. A est majoré par 5, minoré par -11.
2. A admet 4 pour maximum mais n'admet pas de minimum.

Exercice 3 : Déterminer l'ensemble des réels x tels que les deux membres de l'inégalité suivante soient bien définis et tels que l'inégalité soit satisfaite :

$$\frac{1}{x-1} > \frac{x+3}{x-2}.$$

Solution: Les deux membres de l'inégalité sont bien définis si $x \neq 1$ et $x \neq 2$. De plus on a les équivalences suivantes :

$$\frac{1}{x-1} > \frac{x+3}{x-2} \Leftrightarrow \frac{1}{x-1} - \frac{x+3}{x-2} > 0 \Leftrightarrow \frac{x-2-(x+3)(x-1)}{(x-1)(x-2)} > 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+x-1}{(x-1)(x-2)} < 0.$$

Le trinôme du numérateur admet pour discriminant $\Delta = 1^2 - 4 \cdot (-1) = 5$ et pour racines $x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Donc $x^2 + x - 1 < 0$ si et seulement si $x \in \left]\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right[$. D'autre part $(x-1)(x-2) < 0$ si et seulement si $x \in]1, 2[$. A l'aide d'un tableau de signe on en déduit que $\frac{1}{x-1} > \frac{x+3}{x-2}$ si et seulement si $x \in \left]\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right[\cup]1, 2[$.

Exercice 4 : Déterminer l'ensemble des réels x qui vérifient

$$|x-1| - |x+2| \leq x + 3.$$

Solution: On étudie cette inéquation sur $]-\infty, -2]$, $]-2, 1]$ et $]1, +\infty[$.

— Pour tout x dans $]-\infty, -2]$ on a $|x-1| - |x+2| - x - 3 = -x + 1 + x + 2 - x - 3 = -x$. Or $-x \leq 0$ si et seulement $x \geq 0$. Ainsi pour tout x dans $]-\infty, -2]$, aucun réel ne vérifie l'inégalité $|x-1| - |x+2| \leq x + 3$.

— Pour tout x dans $]-2, 1]$ on a $|x-1| - |x+2| - x - 3 = -x + 1 - x - 2 - x - 3 = -3x - 4$. Or $-3x - 4 \leq 0$ si et seulement $x \geq -\frac{4}{3}$. Ainsi pour tout x dans $]-2, 1]$ on a $|x-1| - |x+2| \leq x + 3$ si et seulement si $x \in \left[-\frac{4}{3}, 1\right]$.

— Pour tout x dans $]1, +\infty]$ on a $|x-1| - |x+2| - x - 3 = x - 1 - x - 2 - x - 3 = -x - 6$. Or $-x - 6 \leq 0$ si et seulement $x \geq -6$. Ainsi tout réel x dans $]1, +\infty]$ on a $x - 1 - |x+2| \leq x + 3$.

En conclusion, l'ensemble des solutions de l'inéquation est $\left[-\frac{4}{3}, +\infty\right[$.

Exercice 5 :

1. Montrer que pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[$ on a

$$\tan(2x) = \frac{2\tan(x)}{1-\tan^2(x)}.$$

Solution: Si $x \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[$ alors $\tan(x)$ est bien défini et, comme $2x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $\tan(2x)$ est également bien défini. De plus,

$$\tan(2x) = \frac{\sin(2x)}{\cos(2x)} = \frac{2\cos(x)\sin(x)}{\cos^2(x)-\sin^2(x)} = \frac{2\tan(x)}{1-\tan^2(x)},$$

où pour la dernière égalité on a divisé le numérateur et le dénominateur par $\cos^2(x)$.

2. Déterminer la valeur exacte de $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$. *Indication : on pourra chercher une équation dont* $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$ *est solution.*

Solution: D'après la question précédente appliquée à $x = \frac{\pi}{8} \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[$, on a

$$1 = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = \tan\left(2 \times \frac{\pi}{8}\right) = \frac{2\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)}{1-\tan^2\left(\frac{\pi}{8}\right)}.$$

Ainsi, on trouve que $\tan^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + 2\tan\left(\frac{\pi}{8}\right) - 1 = 0$, ce qui veut dire que $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$ est donc une solution de l'équation $x^2 + 2x - 1 = 0$. Le discriminant du trinôme associé est $\Delta = 2^2 - 4 \cdot (-1) = 8$, les deux solutions de cette équation sont donc $x_1 = \frac{-2-\sqrt{8}}{2} = -1-\sqrt{2}$ et $x_2 = -1+\sqrt{2}$. Comme $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right) > 0$ on en déduit $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{2}-1$.