Université Claude Bernard Lyon 1 — UE Analyse 1 pour informaticiens
Semestre d'automne 2023-2024

Contrôle continu n°2

Lundi 13 novembre 2023 – Durée : 20min.

Les documents et les appareils électroniques ne sont pas autorisés. La notation tiendra compte du soin apporté à la rédaction des réponses.

Nom :

Prénom :

Exercice 1 : Calculer, si elle existe, la limite lorsque x tend vers $+\infty$ de $f : x \mapsto \dfrac{\ln(x) + x^4 + x^2 + 3}{5x^4 + 1}$.

Solution: Pour tout x réel strictement positif on a

$$f(x) = \frac{\ln(x) + x^4 + x^2 + 3}{5x^4 + 1} = \frac{x^4}{x^4} \frac{1 + x^{-4}\ln(x) + x^{-2} + 3x^{-4}}{5 + x^{-4}} = \frac{1 + x^{-4}\ln(x) + x^{-2} + 3x^{-4}}{5 + x^{-4}}$$

Et donc comme x^{-2}, x^{-4} et $x^{-4}\ln(x)$ tendent vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$ (par croissance comparée pour le dernier) on en déduit par composition de limites que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \dfrac{1}{5}$.

Exercice 2 :

1. Calculer $\cosh\left(\frac{1}{2}\ln(5)\right)$ et $\sinh\left(\frac{1}{2}\ln(5)\right)$.
   Solution: On a

$$\begin{aligned}\cosh\left(\frac{1}{2}\ln(5)\right) &= \frac{1}{2}\left(e^{(\ln 5)/2} + e^{-(\ln 5)/2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(5^{1/2} + 5^{-1/2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\frac{5+1}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{3}{\sqrt{5}}\end{aligned} \quad \text{et} \quad \begin{aligned}\sinh\left(\frac{1}{2}\ln(5)\right) &= \frac{1}{2}\left(e^{(\ln 5)/2} - e^{-(\ln 5)/2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(5^{1/2} - 5^{-1/2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\frac{5-1}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{5}}.\end{aligned}$$

2. À l'aide de la formule de calcul de $\cosh(a+b)$, résoudre l'équation d'inconnue réelle x :

$$\frac{3}{\sqrt{5}}\cosh x + \frac{2}{\sqrt{5}}\sinh x = \cosh(3x).$$

   Solution: Notons $u = \frac{1}{2}\ln(5)$.
   Pour tous réels a et b, on a $\cosh(a+b) = \cosh a \cdot \cosh b + \sin h \cdot \sinh b$ et donc, pour tout réel x, on a

$$\frac{3}{\sqrt{5}}\cosh x + \frac{2}{\sqrt{5}}\sinh x = \cosh u \cdot \cosh x + \sinh u \cdot \sinh x = \cosh(x+u).$$

   Résoudre l'équation proposée revient donc à chercher l'ensemble des réels x tels que $\cosh(u+x) = \cosh(3x)$. Or on sait que deux réels admettent le même cosinus hyperbolique s'ils sont égaux ou opposés. On a donc

$$\begin{aligned}\cosh(x+u) = \cosh(3x) &\Leftrightarrow x + u = 3x \text{ ou } x + u = -3x \\ &\Leftrightarrow 2x = u \text{ ou } -4x = u \\ &\Leftrightarrow x = \frac{u}{2} \text{ ou } x = -\frac{u}{4}.\end{aligned}$$

L'ensemble des réels x vérifiant $\frac{3}{\sqrt{5}} \cosh x + \frac{2}{\sqrt{5}} \sinh x = \cosh(3x)$ est donc

$$\left\{ \frac{\ln 5}{4}, -\frac{\ln 5}{8} \right\}.$$