

**Feuille d'exercices n° 6**

NOMBRES RÉELS ET SUITES RÉELLES

**Exercice 1.** Pour chacun des ensembles qui suivent, déterminer s'ils possèdent une borne supérieure et une borne inférieure. Le cas échéant, donner ces bornes et décider si ce sont également des extrema.

- a)  $[0, 1[$
- b)  $\{ (-1)^n + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbf{N}^* \}$
- c)  $\left\{ \frac{m}{mn+1} \mid (m, n) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}^* \right\}$
- d)  $[0, \sqrt{2}] \cap \mathbf{Q}$

**Exercice 2.** Soient  $A$  et  $B$  deux parties non vides de  $\mathbf{R}$ .

1. On note  $-A = \{-a \mid a \in A\}$ .
  - a) Montrer que  $\inf A$  existe si et seulement si  $\sup(-A)$  existe et qu'alors  $\inf A = -\sup(-A)$ .
  - b) Montrer que  $\sup A$  existe si et seulement si  $\inf(-A)$  existe et qu'alors  $\sup A = -\inf(-A)$ .
2. Supposons  $B \subset A$ .
  - a) On suppose  $A$  majoré. Montrer que  $B$  possède une borne supérieure et que  $\sup B \leq \sup A$ .
  - b) On suppose  $A$  minoré. Montrer que  $B$  possède une borne inférieure et que  $\inf B \geq \inf A$ .
3. On note  $A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$ . À quelle condition  $\sup(A + B)$  existe-t-elle ? Dans ce cas, l'exprimer en fonction de  $\sup(A)$  et  $\sup(B)$ .

**Exercice 3.** Soit  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction majorée. Pour tout  $y \in \mathbf{R}$ , on pose :

$$f^*(y) = \sup_{x \leq y} f(x).$$

1. Illustrer la définition de  $f^*$  par des figures rapides sur différents exemples de fonctions  $f$ .
2. Déterminer  $f^*$  dans le cas où  $f$  est croissante.
3. Étudier la monotonie de  $f^*$ .

**Exercice 4.** Soit  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  une fonction croissante. On veut établir que  $f$  possède un *point fixe*, c'est-à-dire qu'il existe  $x_0 \in [0, 1]$  tel que  $f(x_0) = x_0$ .

Posons

$$T = \{x \in [0, 1] \mid f(x) \leq x\}.$$

1. — Démontrer que  $T$  possède une borne inférieure  $t$ .
  - Démontrer que  $f(t)$  minore  $T$ .
  - Établir l'inclusion  $f(T) \subseteq T$ .
  - En déduire que  $t$  est un point fixe de  $f$ .
2. Ce résultat est-il toujours vrai pour une fonction croissante de  $[0, 1[$  dans  $[0, 1[$  ?

**Exercice 5.** On appelle *nombre dyadique* tout nombre rationnel de la forme  $\frac{m}{2^n}$ , avec  $m \in \mathbf{Z}$  et  $n \in \mathbf{N}$ . Démontrer que l'ensemble des nombres dyadiques est dense dans  $\mathbf{R}$ .

**Exercice 6.**

1. Soit  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  une suite à valeurs dans  $\mathbf{Z}$ .  
Montrer que  $(u_n)$  converge si et seulement si elle est stationnaire, c'est-à-dire si elle est constante à partir d'un certain rang.
2. Soit  $D \subseteq \mathbf{Z}$  un ensemble non vide et majoré. Montrer que  $D$  possède un plus grand élément.

**Exercice 7.** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  une suite réelle convergeant vers  $\ell \in \mathbf{R}_+^*$ .

Montrer qu'il existe  $N_0 \in \mathbf{N}$  tel que  $\forall n \in \mathbf{N}, n \geq N_0 \implies u_n \geq \frac{\ell}{2}$ .

**Exercice 8.** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  une suite réelle bornée et  $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$  convergeant vers une limite  $\ell \in \mathbf{R}$ .

1. On suppose  $\ell = 0$ . Montrer que  $(u_n v_n)_{n \in \mathbf{N}}$  converge vers 0.
2. Est-ce toujours vrai si  $\ell \neq 0$ ?

**Exercice 9.** Soient  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$  deux suites réelles convergentes. Étudier la convergence de la suite  $(\max\{u_n, v_n\})_{n \in \mathbf{N}}$  de deux manières différentes :

1. en commençant par chercher une expression simple de  $\max\{x, y\}$  en fonction de  $x$  et  $y$  pour tous  $x, y \in \mathbf{R}$  (*Indication : on pourra s'intéresser à  $\max\{x, y\} + \min\{x, y\}$  et  $\max\{x, y\} - \min\{x, y\}$ );*)
2. en revenant à la définition de la limite.

**Exercice 10.** Étudier la convergence de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ , dont le terme général est donné par :

- |  |   |  |
|--|---|--|
| a) $u_n = \frac{n}{n^2 + 1}$ ,               | b) $u_n = \left(n + \frac{2}{n^2}\right)^3 - n^3$ , | c) $u_n = \left(n + \frac{1}{n}\right) \left(n - \frac{1}{n}\right) - n^2$ , |
| d) $u_n = \sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 + 1}$ , | e) $u_n = \frac{(-1)^n}{n + 1}$ ,                   | f) $u_n = \frac{2n^6 + 5n + 1}{n^6 - 2}$ ,                                   |
| g) $u_n = (-1)^n n$ ,                        | h) $u_n = \frac{2^n - 3^n}{2^n + 3^n}$ ,            | i) $u_n = \sqrt[n]{n}$ ,   |
| j) $u_n = 2 + \frac{\sin(n) - 4}{n^2}$ ,     | k) $u_n = n^{\frac{1}{\ln n}}$ ,                    | l) $u_n = \frac{(-5)^n + n}{3^n - 1}$ ,                                      |
| m) $u_n = \frac{n!}{n^n}$ .                  |   |  |

**Exercice 11.** Étudier la convergence de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$  définie pour  $n \in \mathbf{N}^*$  par

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + k}}.$$

**Exercice 12.** Pour tout  $n \in \mathbf{N}$ , posons

$$u_n = \sqrt{n} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor.$$

1. Étudier la convergence des suites  $(u_{n^2})_{n \in \mathbf{N}}$  et  $(u_{n^2+n})_{n \in \mathbf{N}}$ .
2. En déduire que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  ne converge pas.

**Exercice 13.** Irrationalité de  $e$ .

Pour tout  $n \in \mathbf{N}^*$  on pose  $u_n = \sum_{p=0}^n \frac{1}{p!}$  et  $v_n = \sum_{p=0}^n \frac{1}{p!} + \frac{1}{n!}$ .

1. Montrer que les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  convergent vers la même limite.
2. Posons  $e = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ . Nous allons démontrer que  $e$  est un nombre irrationnel en raisonnant par l'absurde. Supposons qu'il existe deux entiers naturels  $p, q \geq 1$  tels que  $e = \frac{p}{q}$ .
  - Établir l'encadrement  $u_n < e < v_n$  pour tout  $n \in \mathbf{N}^*$ .
  - Vérifier que  $q!u_q$  et  $q!v_q$  sont deux nombres entiers consécutifs.
  - Conclure le raisonnement.

**Exercice 14.**

1. Montrer que pour tout  $x \geq 0$  on a :  $x - \frac{1}{2}x^2 \leq \ln(1+x) \leq x$ .
2. En déduire la limite des suites de terme général :

a)  $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

b)  $v_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$ .

**Exercice 15.** Somme harmonique

Pour tout  $n \in \mathbf{N}^*$ , on pose  $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ .

1. Montrer que pour tout  $k \in \mathbf{N}^*$ ,  $\int_k^{k+1} \frac{dx}{x} \leq \frac{1}{k}$ .
2. En déduire la nature de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ .

**Exercice 16.** Lemme de Cesàro.

1. Soit  $(u_n)$  une suite réelle. On définit la suite  $(v_n)$  dont le terme général est la moyenne arithmétique des  $n$  premiers termes de la suite  $(u_n)$  :

$$v_n = \frac{u_1 + u_2 + \dots + u_n}{n}.$$

Montrer que si  $(u_n)$  converge vers  $\ell \in \overline{\mathbf{R}}$  alors  $(v_n)$  converge également vers  $\ell$ .

2. Soit  $(u_n)$  une suite réelle. On suppose que la suite  $(u_{n+1} - u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  converge vers  $\ell \in \overline{\mathbf{R}}$ . Démontrer que la suite  $\left(\frac{u_n}{n}\right)_{n \in \mathbf{N}^*}$  converge vers  $\ell$ .
3. Soit  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  une suite strictement positive telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell \in \mathbf{R}_+ \cup \{+\infty\}.$$

Démontrer que la suite  $(\sqrt[n]{u_n})_{n \in \mathbf{N}^*}$  converge vers  $\ell$ .

4. Déduire de ce qui précède

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\binom{2n}{n}} \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}.$$

(Indication : pour la seconde suite, on pourra utiliser l'exercice 14)

**Exercice 17.** Suites arithmético-géométriques.

Soit  $(a, b) \in \mathbf{R}^2$  tel que  $a \neq 1$  et soit  $u^{(0)} \in \mathbf{R}$ . On définit par récurrence  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  telle que :  $u_0 = u^{(0)}$  et, pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $u_{n+1} = au_n + b$ .

1. Montrer qu'il existe  $\alpha \in \mathbf{R}$  tel que  $\alpha = a\alpha + b$ .
2. Montrer que la suite  $(v_n)_{n \in \mathbf{N}} = (u_n - \alpha)_{n \in \mathbf{N}}$  est une suite géométrique.
3. En déduire l'expression de  $u_n$  pour tout  $n \in \mathbf{N}$ .
4. Étudier la convergence de  $(u_n)$ . (*Indication : on distinguera les cas  $|a| < 1$ ,  $|a| > 1$  et  $a = -1$* ).
5. Calculer, pour tout  $n \in \mathbf{N}$ , la somme  $\sum_{k=0}^n u_k$ .

**Exercice 18.**

Le but de cet exercice est d'étudier la suite définie par récurrence comme suit :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n(1 - u_n), & \forall n \geq 0, \\ u_0 \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

1. Soit  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  définie par  $f(x) = 2x(1 - x)$  pour tout  $x \in \mathbf{R}$ . Dresser le tableau des variations de  $f$  et dessiner son graphe.
2. Étudier le signe de  $f(x) - x$  pour tout  $x \in \mathbf{R}$ .
3. Montrer que si  $(u_n)$  converge, alors elle converge vers un point fixe de  $f$ . Déterminer les points fixes de  $f$ . Que peut-on dire de la suite  $(u_n)$  si  $u_0$  est l'un des points fixes de  $f$  ?
4. Montrer que les intervalles  $] - \infty, 0[$  et  $]0, 1/2[$  sont stables par  $f$  et que  $f$  est croissante sur ces intervalles. *On dit qu'un intervalle  $I$  est stable par  $f$  si  $f(I) \subset I$ .*
5. On suppose que  $u_0 \in ]0, 1/2[$ . Montrer que la suite  $(u_n)$  est alors croissante (*On pourra s'aider de la question 3.*) En déduire la nature de la suite  $(u_n)$ . Même question si  $u_0 \in ] - \infty, 0[$ .
6. Étudier la nature de la suite  $(u_n)$  lorsque  $u_0 \in ]1/2, +\infty[$ .

**Exercice 19.**

Le but de cet exercice est d'étudier la suite définie par récurrence comme suit :

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n(u_n^2 - 1), & \forall n \geq 0, \\ u_0 \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

1. Soit  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  définie par  $f(x) = x(x^2 - 1)$  pour tout  $x \in \mathbf{R}$ . Répéter pour  $f$  l'étude des questions 1 à 3 de l'exercice précédent.
2. Montrer que l'intervalle  $[-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}]$  est stable par  $f$  et que  $f$  est décroissante sur cet intervalle.
3. On suppose que  $u_0 \in [-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}]$ . Montrer que les suites  $(u_{2n})$  et  $(u_{2n+1})$  sont monotones et déterminer leur monotonie en fonction du signe de  $u_0$  (*On pourra montrer que pour  $x \in [-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}]$ , on a  $|f(x)| \leq |x|$* ). Montrer que ces suites sont convergentes et déterminer leurs limites.
4. En déduire la nature de la suite  $(u_n)$  lorsque  $u_0 \in [-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}]$ .
5. On suppose que  $u_0 \in ]-\sqrt{2}, -\frac{1}{\sqrt{3}}[$ . Montrer qu'il existe  $n_0 \in \mathbf{N}$  tel que  $u_{n_0} \in [-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}]$ . En déduire la nature de la suite  $(u_n)$  lorsque  $u_0 \in ]-\sqrt{2}, -\frac{1}{\sqrt{3}}[$ . Quelle est la nature de la suite  $(u_n)$  lorsque  $u_0 \in ]\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{2}[$  ?
6. Étudier la nature de la suite  $(u_n)$  lorsque  $u_0 \in ]-\infty, -\sqrt{2}[$  et lorsque  $u_0 \in ]\sqrt{2}, +\infty[$ .

**Exercice 20.**

En suivant la démarche des exercices 18 et 19, étudier les suites définies par  $u_0 \in \mathbf{R}$  et  $\forall n \in \mathbf{N}$ ,  $u_{n+1} = f(u_n)$ , où la fonction  $f$  est donnée par :

- a)  $f(x) = x^2$ ,                                      b)  $f(x) = x^2 + 1$ ,                                      c)  $f(x) = \sqrt{1+x}$ ,  
 d)  $f(x) = 1 + \ln(x)$ ,                                      e)  $f(x) = e^x - 1$ ,                                      f)  $f(x) = \frac{1}{2+x}$ .

Pour certaines valeurs de  $u_0$ , la suite  $(u_n)$  peut ne pas être définie à partir d'un certain rang.

**Exercice 21.**

- Montrer que :  $\forall x \in [3, 5]$ ,  $3 \leq 3 + \frac{4}{x} \leq 5$ .
- On définit  $\varphi : [3, 5] \rightarrow [3, 5]$ ,  $x \mapsto 3 + \frac{4}{x}$ .
  - Déterminer l'ensemble des points fixes de  $\varphi$ .
  - Montrer que :  $\forall x \in [3, 5]$ ,  $|\varphi(x) - 4| \leq \frac{|x-4|}{2}$ .
- On considère la suite  $(u_n) \in [3, 5]^{\mathbf{N}^*}$  définie par  $u_1 = 5$  et, pour tout  $n \in \mathbf{N}^*$ ,  $u_{n+1} = 3 + \frac{4}{u_n}$ .
  - Montrer que  $(u_n)$  converge et donner sa limite  $\ell$ .
  - Déterminer un entier  $N \in \mathbf{N}^*$  tel que, pour tout  $n \in \mathbf{N}^*$  tel que  $n \geq N$ ,  $u_n$  soit une valeur approchée de  $\ell$  à  $10^{-6}$  près.

**Exercice 22.** *Calcul approché de  $\sqrt{a}$ .*

Soit  $a > 0$  et  $(u_n)$  la suite définie par  $u_0 > 0$  et  $\forall n \in \mathbf{N}$ ,  $u_{n+1} = \frac{1}{2} \left( u_n + \frac{a}{u_n} \right)$ .

- Donner l'ensemble de définition et le tableau de variations de la fonction  $\varphi : x \mapsto \frac{1}{2} \left( x + \frac{a}{x} \right)$ .
- Étudier la convergence de la suite  $(u_n)$ .
- On pose pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $v_n = \frac{u_n - \sqrt{a}}{u_n + \sqrt{a}}$ .  
Calculer  $v_{n+1}$  en fonction de  $v_n$ , puis  $v_n$  en fonction de  $v_0$  et  $n$ .
- Montrer que, si  $u_0 > \sqrt{a}$ , on a  $|u_n - \sqrt{a}| \leq 2u_0.v_0^{2^n}$ .

Ainsi,  $u_n$  réalise une approximation de  $\sqrt{a}$  à la précision  $2u_0.v_0^{2^n}$ .

**Exercice 23.**

Montrer que :

$$\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \cdots}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \cdots}}$$

**Exercice 24.** Soit  $(a_n)_{n \in \mathbf{N}^*} \in (\mathbf{R}_+^*)^{\mathbf{N}^*}$ . Pour tout  $n \in \mathbf{N}^*$ , on note  $f_n$  la fonction

$$f_n : \begin{array}{l} \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \\ x \longmapsto 1 - \sum_{i=1}^n a_i x^i \end{array} .$$

- Montrer que, pour tout  $n \in \mathbf{N}^*$ , il existe un unique  $x_n \in \mathbf{R}_+$  tel que  $f_n(x_n) = 0$ .
- Montrer que la suite  $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$  est décroissante.
- En déduire qu'elle converge.

**Exercice 25.**

Soit  $n$  un entier naturel et  $E_n$  l'équation  $x + \tan x = n$  d'inconnue  $x \in ]-\pi/2, \pi/2[$ .

1. Montrer que l'équation  $E_n$  possède une solution unique notée  $x_n$ .
2. Montrer que la suite  $(x_n)$  converge et déterminer sa limite.

**Exercice 26.**

Soient  $I$  un intervalle et  $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$  une suite de fonctions de  $I$  dans  $\mathbf{R}$ . On suppose que, pour tout  $n \in \mathbf{N}$  :

- l'équation  $f_n(x) = 0$  d'inconnue  $x \in I$  admet une unique solution  $x_n$  ;
- la fonction  $f_n$  est strictement croissante sur  $I$  ;
- pour tout  $x \in I$ ,  $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ .

1. Conjecturer, à partir d'un dessin, le sens de monotonie de la suite  $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ .
2. Démontrer rigoureusement cette conjecture.
3. Application : considérer la suite des fonctions  $f_n$  définies sur  $\mathbf{R}_+^*$  par  $f_n(x) = x^n \ln(x) - 1$ .

**Exercice 27.**

Montrer que l'équation  $xe^x = n$  possède pour tout  $n \in \mathbf{N}$ , une unique solution  $x_n$  dans  $\mathbf{R}_+$ . Étudier la convergence de la suite  $(x_n)$ .