$f : [0; \pi/2] \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{si } \cos(x) \in \mathbb{Q} \\ \sin^2 x & \text{sinon} \end{cases}$

1. f intégrable

f mesurable : $f(x) = \sin(x) \chi_{\{x \mid \cos(x) \in \mathbb{Q}\}} + \sin(x)^2 \left(1 - \chi_{\{x \mid \cos(x) \in \mathbb{Q}\}}\right)$

$$f(x) = \sin(x) \chi_{\cos^{-1}(\mathbb{Q})} + \sin(x)^2 \left(1 - \chi_{\cos^{-1}(\mathbb{Q})}\right)$$

$\mathbb{Q}$ est borélienne (car dénombrable) donc $\cos^{-1}(\mathbb{Q})$ est borélienne car $\cos$ est borélienne (car continue) donc $\chi_{\cos^{-1}(\mathbb{Q})}$ est borélienne. Puisque $\sin$ est aussi borélienne (car continue), on a f borélienne.

On a $|f| \leq 1$ donc elle est intégrable car la fonction $x \mapsto 1$ est intégrable : $\int_{[0;\pi/2]} 1 \, d\lambda = \int_0^{\pi/2} dx = \frac{\pi}{2}$

2. Calculer $\int_{[0;\pi/2]} f(x) \, d\lambda$

On a $f(x) = \sin(x)^2$ pp puisque $\cos^{-1}(\mathbb{Q})$ est dénombrable d'où

(et donc de mesure nulle) $\displaystyle\int_{[0;\pi/2]} f \, d\lambda = \int_{[0;\pi/2]} \sin(x)^2 \, d\lambda = \int_0^{\pi/2} \sin(x)^2 \, dx = \pi/4$

$$f(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} \, dt \qquad x \in \mathbb{R}$$

1. f finie <u>si</u> $x > 0$ (à faire)
2.