1. F, G fermés non vides avec $F \cap G = \emptyset$

$$\phi(x) = \frac{d(x,G)}{d(x,F) + d(x,G)} \quad \text{avec } d(x,G) = \operatorname*{Inf}_{y \in G} d(x,y)$$

Montrer ϕ continue avec $\phi_{|F} = 1$ et $\phi_{|G} = 0$.

Remarque : Puisque $F \cap G = \emptyset$, on a $d(x+F) + d(x,G) > 0$

(sinon $d(x,F) = 0 \Rightarrow x \in F$ car F fermé d'où $F \cap G \neq \emptyset$)
et $d(x,G) = 0 \Rightarrow x \in G$ car G fermé

Donc ϕ est bien définie $\forall x \in X$.

Si $x \in F$, alors $\phi(x) = \dfrac{d(x,G)}{0 + d(x,G)} = 1$

Si $x \in G$, alors $\phi(x) = \dfrac{0}{d(x,F) + 0} = 0$

On a ϕ continue car la fonction $x \mapsto d(x,A)$
est continue pour toute partie $A \subseteq X$, A non vide.

La fonction $x \mapsto d(x,A)$ est continue car Lipschitz.

Soit $a \in A$. On trouve $d(x,A) \leq d(x,a) \leq d(x,y) + d(y,a)$

d'où $\forall a \in A$; $d(x,A) \leq d(x,y) + d(y,a)$

donc $d(x,A) \leq d(x,y) + d(y,A)$

De manière symétrique, on a

$$d(y,A) \leq d(x,y) + d(x,A)$$

On en déduit que $|d(x,A) - d(y,A)| \leq d(x,y)$

donc la fonction est bien Lipschitz.

2. A mesurable. On admet : $\exists F$ fermé, U ouvert

avec $F \subseteq A \subseteq U$ et $\nu_1(U \setminus F) < \varepsilon$.

On montre qu'il existe $B \subseteq [0;1]$ tels que $\nu_1(B) < \varepsilon$

et $\chi_A|_{[0;1] \setminus B}$ est continue. (ici $A \subseteq [0;1]$ mesurable)

On utilise la question 1 avec $F = F$ et $G = [0;1] \setminus U$

avec F et U comme ci-dessus. On note ϕ la ; $F \cap G = \emptyset$

fonction obtenue. Alors ϕ continue sur $F \cup G = [0;1] \setminus B$

avec $B = U \setminus F$ et est égale à χ_A sur $F \cup G$

En effet, soit $x \in F \cup G$ alors $x \in F$ ou $x \in G$

si $x \in F$ alors $\phi(x) = 1$ et $\chi_A(x) = 1$ puisque $F \subseteq A$

si $x \in G$ alors $\phi(x) = 0$ et $\chi_A(x) = 0$

puisque $x \notin U$ et $A \subseteq U$

Pour finir, $\lambda_1(B) = \lambda_1(U \setminus F) < \varepsilon$.

3. f <u>étagée</u>

On écrit $f = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}$ avec $a_i \in \mathbb{R}$

A_i mesurables de $[0;1]$

Par la question 2, il existe $\forall i$, B_i mesurable de $[0;1]$

tel que χ_{A_i} est continue sur $[0;1] \setminus B_i$ avec $\lambda_1(B_i) < \varepsilon/n$.

On pose $B = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$ alors $\forall i$ χ_{A_i} continue sur $[0;1] \setminus B$

donc f est continue sur $[0;1] \setminus B$. De plus, on a

$$\lambda_1(B) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_1(B_i) < \varepsilon.$$

4. Th. Egoroff : $f_n \to f$ simplement. Alors $\forall \delta > 0$, $\exists A$ mesurable avec $\mu(A) < \delta$ et $f_n \to f$ unif. sur A^c

---

Soit f mesurable sur $[0,1]$. Il existe (f_n) de fonctions étagées avec $f_n \to f$ simplement. Pour tout $n \geq 1$, il existe B_n mesurable avec f_n continue sur $[0,1] \setminus B_n$ et $\lambda_1(B_n) < \varepsilon / 2^{n+1}$. On pose $B' = \bigcup_n B_n$ mesurable. Les fonctions f_n sont continues sur $[0,1] \setminus B'$. De plus,

$$\lambda_1(B') \leq \sum_{n \geq 1} \varepsilon / 2^{n+1} = \varepsilon/2.$$

Par th. d'Egoroff, il existe B'' mesurable de $[0,1]$ tel que $f_n \to f$ unif. sur $[0,1] \setminus B''$ et $\lambda_1(B'') < \varepsilon/2$

On pose $B = B' \cup B''$. On a $\lambda_1(B) < \varepsilon$

et les fonctions $f_n \to f$ unif sur B et sont continues donc f est continue sur $[0;1] \setminus B$.