$f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ mesurables

$A = \{ x \in X \mid \lim_n f_n(x) \text{ existe} \}$

Montrer A mesurable

On a $A = \{ x \in X \mid \liminf f_n(x) = \limsup f_n(x) \}$

par l'indication. $\liminf f_n(x) - \limsup f_n(x) = 0$

On pose $g : \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}}$ par

$(x, y) \longmapsto x - y \quad (x,y) \neq (+\infty, +\infty)$
$(-\infty, -\infty)$

$(+\infty, +\infty) \longmapsto 0$

$(-\infty, -\infty) \longmapsto 0$

Alors g est mesurable car g est continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

(donc $g^{-1}(B)$ mesurable $\forall B$ borélien de $\mathbb{R}$)

et on vérifie que $g^{-1}(+\infty)$ et $g^{-1}(-\infty)$ sont boréliens

On pose $h = g \circ (f_i, f_s)$ avec

$f_i(x) = \liminf f_n(x), \quad f_s(x) = \limsup f_n(x)$

Note : f_i, f_s sont mesurables donc (f_i, f_s) est mesurable

donc h est mesurable

On a $A = h^{-1}(\{0\})$ puisque $\{0\}$ mesurable

donc A est mesurable