Ex : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ C^1 $\quad \forall x \neq 0, \ x f(x) < 0$

$$\begin{cases} y' = f(y) & t \in \mathbb{R} \quad \text{avec } y_0 > 0 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

1. Th. Cauchy-Lips. Solution (y, J)

2. Montrer $t \mapsto y(t)^2$ décroissante

Posons $z(t) = y(t)^2$. On calcule $z'(t) = 2y'(t)y(t)$

$= 2f(y(t))\,y(t)$ $\to$ $= 0$ si $y(t) = 0$

< 0 si $y(t) \neq 0$

d'où $z'(t) \leq 0 \ \forall t \in J$ donc z est décroissante

3. J contient $[0; +\infty[$ et $\exists \ell \geq 0$ tq $\lim_{\infty} y^2 = \ell$

Notons que J contient 0 puisque c'est une solution.

On pose $J =]\alpha, \beta[$ avec $\alpha < 0$. Supposons que

$\beta < +\infty$. Alors par le théorème d'explosion en temps

fini, on a $\lim_{t \to \beta^-} |y(t)| = +\infty$ d'où $\lim_{t \to \beta^-} z(t) = +\infty$

Mais c'est impossible puisque z est décroissante : $z(t) \leq z(0)$

$\forall t \geq 0$

Donc on a bien $[0;+\infty[\subseteq J$.

On sait que $t \mapsto y(t)^2$ décroissante et elle est minorée par 0 donc elle converge vers $\ell \geqslant 0$.