$$\begin{cases} y' = \sqrt{|y|} \\ y(0) = 0 \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

1. Solution non nulle globale

$$y(t) = \begin{cases} -t^2/4 & \text{si } t \leq 0 \\ t^2/4 & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

$$y'(t) = \begin{cases} -t/2 & \text{si } t \leq 0 \\ t/2 & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

2. Th. de Cauchy-Lips. ?

Non, car $y = 0$ est aussi solution globale

En effet, $x \mapsto \sqrt{|x|}$ n'est pas loc. Lips.

$$\begin{cases} y' = -\frac{1}{t} y^2 + \frac{2}{t} y \\ y(1) = 4 \end{cases} \qquad t \in]0; +\infty[$$

1. Th. de Cauchy-Lips. $f(t,x) = -\frac{1}{t} x^2 + \frac{2}{t} y$

f est C^1 Unique solution max. (y, J)

2. Montrer que $\forall t \in J$, $y(t) \neq 0$

Supposons qu'il existe $t_0 \in J$ avec $y(t_0) = 0$ alors y est solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = -\frac{1}{t} y^2 + \frac{2}{t} y \\ y(t_0) = 0 \quad t > 0 \end{cases}$$

globale

Mais la fonction $t \mapsto 0$ est aussi solution globale.
(et elle est différente de y puisque $y(1) = 4$)

Contradiction car la solution max. est unique

donc $\forall t \in J$, $y(t) \neq 0$.

3. On pose $z(t) = 1/y(t)$ $\quad t \in]0; +\infty[$

On a $$z'(t) = -\frac{y'(t)}{y^2(t)} = -\frac{1}{y^2}\left[-\frac{1}{t} y^2 + \frac{2}{t} y\right]$$

$$= \frac{1}{t} - \frac{2}{t}\frac{1}{y} = \frac{1}{t} - \frac{2}{t} z(t)$$

4. On résoud $z' = -\frac{2}{t} z + \frac{1}{t}$ $\quad z(1) = 1/y(1) = \frac{1}{4}$

On applique la formule de Duhamel

$$z(t) = e^{\int_1^t -2/s\,ds} \times \frac{1}{4} + \int_1^t e^{\int_s^t -2/\sigma\, d\sigma} \cdot \frac{1}{s} ds$$

$$= \frac{1}{4} e^{-2\ln(t)} + \int_1^t e^{-2[\ln t - \ln s]} \times \frac{1}{s} ds$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{t^2} + \frac{1}{t^2} \int_1^t s\,ds = \frac{1}{2} - \frac{1}{4t^2} = \frac{2t^2-1}{4t^2}$$

5. Solution (y, J)

On a $z(t) = 1/y(t)$ pour $t \in J$

La fonction z s'annule en $t = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (pour $t > 0$)

On veut $1 \in J$. Donc $J =]\frac{\sqrt{2}}{2}; +\infty[$ et

$$y(t) = \frac{4t^2}{2t^2-1}$$