$y' = ay + f \qquad t \in I$

1. Montrer $\displaystyle y(t) = e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds}\, y_0 + \int_{t_0}^{t} e^{\int_s^t a(\sigma)d\sigma} f(s)ds$

est solution globale avec $y(t_0) = y_0$

$$\int_{t_0}^{t} e^{\int_s^{t_0} a(\sigma)d\sigma + \int_{t_0}^{t} a(\sigma)d\sigma} f(s)ds$$

On dérive

$$y'(t) = \underbrace{a(t) e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds}\, y_0 + a(t) e^{\int_{t_0}^{t} a(\sigma)d\sigma} \times \int_{t_0}^{t} e^{\int_s^{t_0} a(\sigma)d\sigma} f(s)ds}_{a(t)\,y(t)} + \underbrace{e^{\int_{t_0}^{t} a(\sigma)d\sigma} \times e^{\int_t^{t_0} a(\sigma)d\sigma} f(t)}_{f(t)}$$

donc y est solution et $y(t_0) = e^{\overbrace{\int_{t_0}^{t_0}}^{0}}\, y_0 + \underbrace{\int_{t_0}^{t_0}}_{0}$

$= y_0$

2. Eq. homogène $y' = ay \rightsquigarrow$ solution $y = C e^{\int_{t}^{t_0} a(s)ds}$

$C \in \mathbb{R}$

Méthode de la constante pour résoudre $y' = ay + f$

On remplace C par $C(t)$ et on résout pour $C(t)$. ...

3. Résoudre $\quad y' + \frac{y}{t^2} = -1/t^3 \quad t \in]0;+\infty[$

avec $y(1)=1$

$a(t) = -1/t^2 \quad f(t) = -1/t^3 \qquad t_0 = y_0 = 1$

$$y(t) = e^{\int_1^t -1/s^2\, ds} + \int_1^t e^{\int_s^t -1/\sigma^2\, d\sigma} \cdot \frac{-1}{s^3}\, ds$$

$$= e^{1/t - 1} - e^{1/t} \underbrace{\int_1^t \frac{e^{-1/s}}{s^3}\, ds}$$

ipp

$$\int_1^t \frac{e^{-1/s}}{s^3}\, ds = \int_1^t \frac{1}{s}\, \underbrace{e^{-1/s} \cdot (1/s^2)}_{\text{dérivée de } e^{-1/s}}\, ds$$

$$= \dots = \frac{e^{-1/t}}{t} + e^{-1/t} - 2e^{-1}$$

d'où $\quad y(t) = 3e^{1/t - 1} - \frac{1}{t} - 1 \qquad t \in]0;+\infty[$

<u>Remarque</u> : $y(1) = 3e^{1-1} - 1 - 1 = 1$

$$y'(t) = -\frac{3e^{1/t - 1}}{t^2} + \frac{1}{t^2}$$

$$y'(t) + \frac{y(t)}{t^2} = -\frac{1}{t^3} \quad \checkmark$$