$A \in GL_n(\mathbb{K})$ $\qquad \|\cdot\|$ norme sur $\mathbb{K}^n$ $\quad |||\cdot|||$ norme sub.

1. $\forall x \in \mathbb{K}^n, \ \|Ax\| \geq \dfrac{\|x\|}{|||A^{-1}|||}$

On a $\|A^{-1}y\| \leq |||A^{-1}|||.\|y\|$ $\quad$ On prend $y = Ax$

d'où $\|x\| \leq |||A^{-1}|||.\|Ax\|$ et le résultat suit.

$(|||A^{-1}||| \neq 0)$

$\hookrightarrow |||A|||\times|||A^{-1}||| \geq |||AA^{-1}||| = |||Id||| = 1$

car $|||\cdot|||$ norme

2. E avec $|||E||| < 1/|||A^{-1}|||$

Montrer $\forall x \in \mathbb{K}^n, \ \|Ax + Ex\| \geq \left(\dfrac{1}{|||A^{-1}|||} - |||E||| \right) \|x\|$

hyp.

On a $\underbrace{|||A^{-1}E||| \leq |||A^{-1}|||.|||E|||}_{\text{norme matricielle}} < 1$

donc $\forall x \in \mathbb{K}^n, \ \|A^{-1}Ex\| < \|x\|$

On écrit $Ax + Ex = (A+E)x = A\underbrace{(I + A^{-1}E)x}$

Par la question 1,

$\|Ax + Ex\| \geq \dfrac{\|(I + A^{-1}E)x\|}{|||A^{-1}|||} = \dfrac{\|x + A^{-1}Ex\|}{|||A^{-1}|||}$

Et $\|x+A^{-1}Ex\| \geq \big| \|x\| - \|A^{-1}Ex\| \big| = \|x\| - \|A^{-1}Ex\|$

d'où
$$\|Ax+Ex\| \geq \frac{\|x\| - \|A^{-1}Ex\|}{|||A^{-1}|||} \geq \frac{\|x\| - |||A^{-1}|||.|||E|||.\|x\|}{|||A^{-1}|||}$$

$$\geq \left(\frac{1}{|||A^{-1}|||} - |||E||| \right).\|x\|$$

Rq: M est inversible ssi $\forall x \neq 0,\ Mx \neq 0$

Soit $x \neq 0$, puisque $\boxed{|||E||| < 1/|||A^{-1}|||}$, ceci est >0

donc $\|(A+E)x\| > 0$ et $(A+E)x \neq 0$

Conclusion : $A+E$ est inversible

3. $A = I_n$ $\quad |||A^{-1}||| = 1$

Donc si $|||E||| < 1$ alors $I_n + E$ est inversible