Sous-groupe caract. G groupe H sous-groupe de G

$H \sqsubset G$ si $\forall \varphi \in Aut(G)$, $\varphi(H) \subseteq H$
H caract.

1. $H \sqsubset G \Rightarrow H \triangleleft G$

On a $H \triangleleft G$ ssi $\forall g \in G$, $gHg^{-1} \subseteq H$

$$gHg^{-1} = i_g(H) \text{ avec } \boxed{\begin{array}{l} i_g : G \to G \\ \quad x \mapsto gxg^{-1} \end{array}}$$

Fait : $i_g \in Aut(G)$ automorphisme intérieur

Si $H \sqsubset G$, alors $\forall \varphi \in Aut(G)$, $\varphi(H) \subseteq H$

En particulier, $\forall g \in G$, $i_g(H) \subseteq H$ donc $H \triangleleft G$

---

2. Montrer $H \sqsubset K \sqsubset G \Rightarrow H \sqsubset G$

On a $\forall \varphi \in Aut(K)$, $\varphi(H) \subseteq H$
$\forall \psi \in Aut(G)$, $\psi(K) \subseteq K$

Soit $f \in Aut(G)$, on doit montrer $f(H) \subseteq H$

On pose $\varphi = f_{|K} : K \to K$ puisque $f(K) \subseteq K$

et φ est morphisme et bijectif

donc $\varphi \in \mathrm{Aut}(K)$

donc $\varphi(H) \subseteq H$ mais $\varphi(H) = f_{|K}(H)$

$= f(H)$

donc on a bien $f(H) \subseteq H$

et $H \sqsubset G$.

3. $H \sqsubset K \triangleleft G \Rightarrow H \triangleleft G$

$(H \triangleleft K \triangleleft G \not\Rightarrow H \triangleleft G)$

$H \triangleleft G$ ssi $\forall g \in G$, $i_g(H) \subseteq H$ où

$i_g(x) = g x g^{-1}$ (auto. intérieur)

On pose $\psi = i_{g\,|K}$ puisque $K \triangleleft G$

On a $\varphi(K) = i_g(K) \subseteq K$ donc $\varphi \in Aut(K)$

(φ est bijective)

Puisque $H \sqsubset K$, on a $\underline{\varphi(H) \subseteq H}$

d'où finalement $i_g(H) = \varphi(H) \subseteq H$

d'où $H \triangleleft G$.

On a $i \in Int(G)$ automorphisme intérieur

alors $i_{|K} \in Aut(K)$

mais $i_{|K} \notin Int(K)$ en général

4. $Z(G) \sqsubset G$?

Soit $\phi \in Aut(G)$ et $z \in Z(G)$, on doit montrer $\phi(z) \in Z(G)$. Donc on doit montrer que $\forall g \in G$, $g\phi(z) = \phi(z)g$. Puisque $\phi \in Aut(G)$, il existe $g' \in G$ tel que $\phi(g') = g$ $[g' = \phi^{-1}(g)]$

Donc $\underline{g}\,\phi(z) = \phi(g')\phi(z) = \phi(g'z)$

$= \phi(zg^{-1})$ car $z \in Z(G)$

$= \phi(z)\phi(g^{-1}) = \phi(z)g$

et on a bien $\phi(z) \in Z(G)$.

Conclusion : $Z(G) \triangleleft G$.

Sous-groupe dérivée ou des commutateurs

$x, y \in G$ $\quad [x,y] = x^{-1}y^{-1}xy \; [= xyx^{-1}y^{-1}]$

commutateur de x et y

$[x,y] = e$ ssi $xy = yx$ ssi $x^{-1}y^{-1}xy = e$

$G' = [G,G] = \langle [x,y] \text{ avec } x, y \in G \rangle$

Prop : $G' \triangleleft G$ et G/G' est abélien

et c'est le plus grand quotient abélien : si $H \triangleleft G$

tel que G/H abélien alors $G' \subseteq H$.

Exercice : $G' \triangleleft G$

5. $\phi : G \to \mathrm{Int}(G)$ ← groupe pour la composition

auto. intérieur

$x \mapsto i_x$ avec $i_x(g) = xgx^{-1}$

- ϕ morphisme de groupes

$x, y \in G$ $\quad \phi(xy) = \phi(x) \circ \phi(y)$ ← à montrer

On a $i_{xy}(g) = xy\,g\,(xy)^{-1} = x\underbrace{y g y^{-1}}\,x^{-1}$

$= x\, i_y(g)\, x^{-1} = i_x(i_y(g))$

$= (i_x \circ i_y)(g)$

et on a bien $\phi(xy) = \phi(x) \circ \phi(y)$

- Noyau ϕ : $\quad x \in \operatorname{Ker}\phi \iff i_x = id_G$

$\iff \forall g \in G,\ xgx^{-1} = g$

$\iff \forall g,\ xg = gx$

$\iff x \in Z(G)$

d'où $\ker \phi = Z(G)$

Conclusion $G/Z(G) \simeq \mathrm{Int}(G)$