$\mathbb{C}^n \quad \langle x,y\rangle = x_1\overline{y_1}+\dots+x_n\overline{y_n} \qquad x,y\in\mathbb{C}^n$

1. $A\in M_n(\mathbb{C})$ hermitienne $A^*=A$

définie positive $\langle x, Ax\rangle > 0 \ \forall x\neq 0$

Par le théorème spectral, on peut écrire

$A = UDU^{-1}$ avec D diag. U unitaire $U^* = U^{-1}$

de plus, $D = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix}$ avec $d_i > 0$ (A définie positive)

$$\sqrt{D} = \begin{pmatrix} \sqrt{d_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{d_n} \end{pmatrix}$$

On pose $H = U\sqrt{D}\,U^{-1}$ $\overbrace{\text{hermitienne / définie positive}}^{\text{th. spectral}}$

$$H^2 = U\sqrt{D}\,U^{-1}U\sqrt{D}\,U^{-1} = U\sqrt{D}^{\,2}U^{-1} = UDU^{-1} = A.$$

Unicité (*) (à suivre)

2. $M \in GL_n(\mathbb{C})$

(a) Montrer $\underbrace{M^*M}_{=A}$ hermitienne et définie positive

$A^* = (M^*M)^* = M^* M^{**} = M^* M = A$ donc A hermitienne

Soit $x \in \mathbb{C}^n$, $x \neq 0$, $\langle x, Ax \rangle = \langle x, M^* M x \rangle$

$= \langle Mx, Mx \rangle = \|Mx\|^2 > 0$

car $Mx \neq 0$ puisque M inv.

d'où A définie positive

Notons H racine carrée positive

(b) $U = MH^{-1}$. Montrer U unitaire : $U^* = U^{-1}$

$U^* = (MH^{-1})^* = (H^{-1})^* M^* = H^{-1} M^*$ car H^{-1} hermitienne

$H^2 = M^* M$ d'où $M^* = H^2 M^{-1}$

donc $U^* = H^{-1} H^2 M^{-1} = HM^{-1} = (MH^{-1})^{-1} = U^{-1}$

U unitaire

(c) $M = HU$ de manière unique

herm. déf. pos. (H)

unitaire (U)

Supposons aussi $M = H'U'$ $\quad$ H, H' hermitienne déf. pos.

U, U' unitaire

Alors $H^2 = HUU^*H^*$ car $UU^* = Id$ et $H = H^*$
$= (HU)(HU)^* = \Pi\Pi^*$

De même $H'^2 = \Pi\Pi^*$ Comme $\Pi\Pi^*$ est hermitienne définie positive $\Rightarrow H = H'$ par question 1 et donc $\underline{U = U'}$.

Attention : • A, B hermitienne avec A, B commutent alors AB hermitienne :

$$(AB)^* = B^*A^* \underset{A,B \text{ hermitienne}}{=} BA \underset{A,B \text{ commutent}}{=} AB$$

• A, B hermitienne définie positive avec A, B commutent alors AB est hermitienne déf positive : on sait déjà que AB est hermitienne donc diag. avec vp. réelles.

Rappel : A, B diag. et qui commutent alors

A et B sont diag. dans une même base : il existe P inversible, D et D' diagonales avec $PAP^{-1} = D$ et $PBP^{-1} = D'$.

<u>Preuve</u> : Soit $\mathrm{Spec}(B)$ l'ensemble des vp de B et pour $\lambda \in \mathrm{Spec}(B)$, E_λ le sous espace propre associé.

Soit $x \in E_\lambda$, on a $\underset{\substack{\shortparallel \\ BAx}}{ABx} = A\lambda x = \lambda A x$ donc $Ax \in E_\lambda$.

Soit u l'endo. défini par A (disons sur la base canonique), alors $\underbrace{u_{|E_\lambda}}_{\text{restriction de } u \text{ à } \vec{E_\lambda}}$ est un endo. de E_λ diag. puisque A est diag. Soient $(e_\lambda^{(1)}, \dots, e_\lambda^{(E_\lambda)})$ une base de vp de $u_{|E_\lambda}$.

Alors la base obtenue en réunissant les bases $(e_\lambda^{(1)}, \dots e_\lambda^{(E_\lambda)})$ pour $\lambda \in \mathrm{Spec}(B)$.

Retour au cas A, B hermitienne déf. positive avec A, B commutant. Soit P telle que PAP^{-1} et PBP^{-1} sont diagonales alors

$PABP^{-1} = PAP^{-1}PBP^{-1}$ donc les vp de AB sont des produits de vp de A et B et donc strict. positives. Donc AB est hermitienne déf. positive.

Unicité de la racine carrée positive de A

Soit H' hermitienne définie positive avec $A = H'^2$

Alors $AH' = H'^3 = H'A$ donc A et H' commutant. Soit λ vp de A et E_λ sev propre correspondant, alors $\sqrt{\lambda}$ vp de H de sev E_λ par construction de H. Alors l'endo. u' associé à H' stabilise E_λ et la restriction $u'_{|E_\lambda}$

vérifie $(u'_{|E_\lambda} \circ u'_{|E_\lambda})(x) = \lambda x \quad \forall x \in E_\lambda$.

Comme $u'_{|E_\lambda}$ est diag., on en déduit que

$u'_{|E_\lambda}(x) = \sqrt{\lambda}\, x \quad \forall x \in E_\lambda$ et

donc $u'_{|E_\lambda} = u_{|E_\lambda}$ avec u l'endo. associé

à H. Donc $H = H'$!