E euclidien de dim. finie $\quad (e_1, \dots, e_n)$ de E avec $\|e_i\| = 1 \ \forall i$

$$\forall x \in E, \ \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle^2 \iff (e_1, \dots, e_n) \text{ base ortho. de } E$$

$\boxed{\Rightarrow}$ • famille orthogonale : $\quad i \neq j \Rightarrow \langle e_i, e_j \rangle = 1$

$$\|e_j\|^2 = \sum_{i \neq j} \langle e_j, e_i \rangle^2 + \underbrace{\langle e_j, e_j \rangle^2}_{\|e_j\|^4 = 1}$$

$$\|e_j\|^2 = 1 \qquad \Downarrow \quad \langle e_j, e_i \rangle = 0 \quad j \neq i$$

• famille libre : $\quad \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n = 0$

Soit $i \in \{1, \dots, n\}$, on calcule $\quad \langle \underbrace{\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n}_{\sum_j \alpha_j \langle e_j, e_i \rangle = \alpha_i}, e_i \rangle = \langle 0, e_i \rangle = 0$

d'où $\alpha_i = 0$

• famille génératrice : $\quad x \in E$, on applique la formule

avec $\quad x - \sum_j \langle x, e_j \rangle e_j$

$$\left\| x - \sum_j \langle x, e_j \rangle e_j \right\|^2 = \sum_i \left\langle x - \sum_j \langle x, e_j \rangle e_j, e_i \right\rangle^2$$

$$= \sum_i \Big[\langle x, e_i \rangle - \langle x, e_j \rangle \underbrace{\sum_j \langle e_j, e_i \rangle}_{\substack{= 0 \text{ si } j \neq i \\ 1 \text{ si } j = i}} \Big]^2$$

$$= \sum_i \big(\langle x, e_i \rangle - \langle x, e_i \rangle \big)^2 = 0$$

d'où $\boxed{x = \sum_i \langle x, e_i \rangle e_i}$ et la famille est génératrice

$\Leftarrow$. Base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$

On écrit $x = \sum_i \langle x, e_i \rangle e_i$ $\quad x = \sum_i d_i e_i$

$$\|x\|^2 = \langle x, x \rangle = \Big\langle \sum_i \langle x, e_i \rangle e_i , \sum_j \langle x, e_j \rangle e_j \Big\rangle$$

$$= \sum_{i,j} \langle x, e_i \rangle \langle x, e_j \rangle \langle e_i, e_j \rangle = \sum_i \langle x, e_i \rangle^2$$

Ex Calculer $\inf_{a,b} \int_0^1 (x^2 - ax - b)^2 dx$

$E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ $\quad \langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x) g(x) dx$

produit scalaire

$\left(\int_0^1 f(x)^2 dx = 0 \Rightarrow f = 0 \right)$

$H = \{ x \mapsto ax + b \mid a, b \in \mathbb{R} \}$ sev de E

$g(x) = x^2 \in E$

$$\inf_{a,b} \int_0^1 (\overbrace{x^2}^{g} - \overbrace{ax - b}^{f})^2 dx = \inf_{f \in H} \| g - f \| = \| g - g_0 \|$$

où g_0 est le projeté ortho. de g sur H

Base de H : $(1, x) \xrightarrow{G.S} (1, 2\sqrt{3}(x - 1/2))$

$(1, x - 1/2)$

$g_0(x) = x - 1/6$

$$\inf_{a,b} \int_0^1 (x^2 - ax - b)^2 dx = \int_0^1 (x^2 - (x - 1/6))^2 dx = 1/180$$

1. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ $\exists\ S, T$ $S = S^t$ $T^t = -T$

uniques avec $A = S + T$

$S = \frac{1}{2}(A + A^t)$ $T = \frac{1}{2}(A - A^t)$

$S^t = \frac{1}{2}(A^t + A) = S$ $T^t = \frac{1}{2}(A^t - A) = -T$

$S + T = A$

<u>Unicité</u>: $A = S + T = S' + T'$

$\rightsquigarrow \underbrace{S - S'}_{\text{sym.}} = \underbrace{T' - T}_{\text{antisym.}} \rightsquigarrow S - S' = T - T' = 0$

2. Montrer $\max\limits_{\|x\|=1} \langle x, Ax \rangle =$ plus grande vp de la partie symétrique de A

$x, y \in \mathbb{R}^n$

$\langle x, y \rangle = x^t y$

On écrit $A = \underset{\text{sym.}}{S} + \underset{\text{antisym.}}{T}$

On a $\langle x, Tx \rangle = \langle T^* x, x \rangle$ par passage à l'adjoint

car T antisym. $= \langle -Tx, x \rangle$

$= -\langle x, Tx \rangle$ d'où $\langle x, Tx \rangle = 0$

Donc $\langle x, Ax\rangle = \langle x, Sx\rangle$

S est symétrique donc diag. dans une base orthonormale

$S = PDP^{-1}$ avec D diag., P orthogonale

$P^* = P^{-1}$

$\shortparallel$

P^t

On calcule $\langle x, Sx\rangle = \langle x, P(DP^* x)\rangle$

$= \langle P^* x, DP^* x\rangle$ ← passage adjoint

$= \langle y, Dy\rangle$ avec $y = P^* x$

$\|y\| = \|x\|$ car $\|y\|^2 = \langle y, y\rangle = \langle P^* x, P^* x\rangle$

$= \langle PP^* x, x\rangle = \langle x, x\rangle = \|x\|^2$

passage adjoint ↗ ; ↑ P orth.

$$\max_{\|x\|=1} \langle x, Ax\rangle = \max_{\|y\|=1} \langle y, Dy\rangle \qquad D = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix}$$

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$= \max_{\|y\|=1} (d_1 y_1^2 + \dots + d_n y_n^2)$$

$$\overset{?}{=} \max_i d_i = d$$

- $d_1 y_1^2 + \dots + d_n y_n^2 \leq d(y_1^2 + \dots + y_n^2) = d\|y\|^2 = d$

- et si $d = d_i$ $\quad y_j = 0 \quad j \neq i \quad y_i = 1 \Rightarrow \|y\| = 1$

  avec $d_1 y_1^2 + \dots + d_n y_n^2 = d$

donc $\max_{\|x\|=1} \langle x, Ax \rangle = d$

3. $(a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{R}$ avec $\boxed{a_1^2 + \dots + a_4^2 = 1}$

max. de $a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_3 a_4 + a_4 a_1$

$a_1 a_2 + \dots + a_4 a_1 = \langle x, Ax \rangle$ où $x = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_4 \end{pmatrix}$ $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

donc on veut $\max_{\|x\|=1} \langle x, Ax \rangle = $ max. des vp de $\frac{1}{2}(A + A^t) = \dots$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{poly. caract.}} T^4 - T^2 = T^2(T^2-1)$$

$$= T^2(T-1)(T+1)$$

d'où réponse en 1