Sous-groupe caract. G groupe H sous-groupe de G

$H \sqsubset G$ si $\forall \varphi \in Aut(G)$, $\varphi(H) \subseteq H$

H caract.

1. $H \sqsubset G \Rightarrow H \triangleleft G$

On a $H \triangleleft G$ ssi $\forall g \in G$, $gHg^{-1} \subseteq H$

$$gHg^{-1} = i_g(H) \text{ avec } \boxed{\begin{aligned} i_g : G &\to G \\ x &\mapsto gxg^{-1} \end{aligned}}$$

Fait: $i_g \in Aut(G)$ automorphisme intérieur

Si $H \sqsubset G$, alors $\forall \varphi \in Aut(G)$, $\varphi(H) \subseteq H$

En particulier, $\forall g \in G$, $i_g(H) \subseteq H$ donc $H \triangleleft G$

---

2. Montrer $H \sqsubset K \sqsubset G \Rightarrow H \sqsubset G$

On a $\forall \varphi \in Aut(K)$, $\varphi(H) \subseteq H$

$\forall \psi \in Aut(G)$, $\psi(K) \subseteq K$

Soit $f \in Aut(G)$, on doit montrer $f(H) \subseteq H$

On pose $\varphi = f_{|K} : K \to K$ puisque $f(K) \subseteq K$

et φ est morphisme et bijectif

donc $\varphi \in \mathrm{Aut}(K)$

donc $\varphi(H) \subseteq H$ mais $\varphi(H) = f_{|K}(H)$

$$= f(H)$$

donc on a bien $f(H) \subseteq H$

et $H \sqsubset G$.