Ex1. Reconnaître S_n / A_n $\quad S_n = \{$permutations sur n lettres$\}$

$n \geq 2$ $\quad A_n$ sous-groupe des permutations paires

$$\mathrm{sign} : S_n \to \{\pm 1\}$$
$$\pi \mapsto \mathrm{sign}(\pi)$$

$\mathrm{sign}(\pi\sigma) = \mathrm{sign}(\pi)\,\mathrm{sign}(\sigma)$ morphisme

$S_n / \ker(\mathrm{sign}) \simeq \mathrm{Im}(\mathrm{sign})$ $\quad S_n / A_n \simeq \{\pm 1\} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

Reconnaître $O_n(\mathbb{R}) / SO_n(\mathbb{R})$

$$SO_n(\mathbb{R}) = \{ M \in O_n(\mathbb{R}) \mid \det M = 1 \}$$

$\det : O_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*$ morphisme

$\ker \det = SO_n(\mathbb{R})$

$$O_n(\mathbb{R}) / SO_n(\mathbb{R}) \simeq \mathrm{Im}(\det) = \{\pm 1\}$$

Reconnaître $GL_n(\mathbb{R}) / SL_n(\mathbb{R})$

GL_n : inv. $\quad SL_n$: $\det = 1$

$\det : GL_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*$ morphisme

$\operatorname{Ker} \det = SL_n(\mathbb{R})$

$\operatorname{Im}(\det) = \mathbb{R}^*$ $\quad \lambda \in \mathbb{R}^*$ $\quad \det\begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & 1 \end{pmatrix} = \lambda$

d'où $\quad GL_n(\mathbb{R}) / SL_n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^*$

$\mathbb{R}^* / \mathbb{R}_+^\times$?

$$x \mapsto \frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$\mathbb{R}^* / \mathbb{R}_+^\times \simeq \{\pm 1\}$$

---

2. Montrer : $\quad S_1 = \{ z \in \mathbb{C}^* \mid |z| = 1 \}$

$\mathbb{R}/\mathbb{Z} \simeq S_1$ $\quad$ groupe mult.

$\Leftarrow$

$\varphi : \mathbb{R} \to S_1$ morphisme

$\varphi(x) = e^{2i\pi x}$

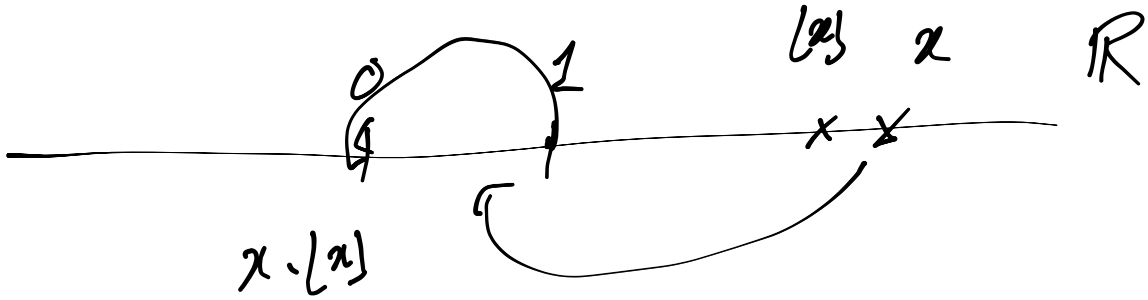
$$\varphi(x+y) = e^{2i\pi(x+y)} = e^{2i\pi x} \cdot e^{2i\pi y}$$
$$= \varphi(x)\varphi(y)$$

φ surjectif

$x \in \operatorname{Ker}\varphi \Leftrightarrow e^{2i\pi x} = 1 \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$

d'où $\operatorname{Ker}\varphi = \mathbb{Z}$ et

$$\mathbb{R}/\mathbb{Z} \simeq S_1$$



$\mathbb{R}^\times/\{\pm 1\} \simeq \mathbb{R}_+^*$ à faire

$\mathbb{C}^*/S_1 \simeq \mathbb{R}_+^*$?

$\varphi : \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}_+^*$

$z \mapsto |z|$ morphisme

$\mathrm{Im}\,\varphi = \mathbb{R}_+^*$

$\mathrm{Ker}\,\varphi = S_1$