Construction de $A \subseteq \mathbb{R}$ avec $A \notin \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$

1. $B \subseteq \mathbb{R}$: $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exists b \in B$ tel que $x - b \in \mathbb{Q}$

Montrer que B borélienne alors $\lambda(B) > 0$ $(\lambda = \lambda_1)$

On a $\mathbb{R} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} (q + B)$. En effet, soit $x \in \mathbb{R}$,

$\exists b \in B$ tel que $x - b = q \in \mathbb{Q}$ d'où $x \in q + B \subseteq \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} (q+B)$

Si B borélienne alors $q+B$ borélienne $\forall q \in \mathbb{Q}$

or $\lambda(\mathbb{R}) \leq \sum_{q \in \mathbb{Q}} \lambda(q+B)$ car $\mathbb{Q}$ dénombrable

$\leq \sum_{q \in \mathbb{Q}} \lambda(B)$. Puisque $\lambda(\mathbb{R}) = +\infty$

on a $\lambda(B) \neq 0$.

2. $B \subseteq [0;1]$ telle que $\forall x, y \in B$, $x \neq y \Rightarrow x - y \notin \mathbb{Q}$.

Montrer que B borélienne alors $\lambda(B) = 0$.

On considère les parties $q+B$ avec $q \in \mathbb{Q} \cap [0;1]$

On a $q+B \subseteq [0;2]$ puisque $0 \leq q \leq 1$ et $B \subseteq [0;1]$

Supposons que $q+B \cap q'+B \neq \emptyset$ avec $q, q' \in \mathbb{Q} \cap [0;1]$

disons $q+x = q'+y$ avec $x, y \in B$

alors $x-y = q'-q \in \mathbb{Q}$ d'où $x=y$ et $q=q'$

donc les ensembles $q+B$, $q \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$ sont ddd.

Supposons B borélien ($\Rightarrow q+B$ borélien $\forall q$)

$$\text{alors } \lambda\Big(\bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [0;1]} (q+B)\Big) = \sum_{q \in \mathbb{Q} \cap [0;1]} \lambda(q+B)$$

apd

$$= \sum_q \lambda(B) \leq 2$$

car c'est inclus dans $[0;2]$

d'où $\lambda(B) = 0$.

3. Si B vérifie les propriétés de (1) et (2)

alors B n'est pas borélienne

On définit sur $\mathbb{R}$ la relation d'équivalence :

$$x \sim y \text{ ssi } x - y \in \mathbb{Q}$$

On prend pour B l'ensemble obtenu en prenant dans chaque classe d'équivalence un représentant dans $[0;1]$

Alors B satisfait (1) et (2)