(X,d) métrique compact $\quad f : X \to X$ avec

$$(*) \quad d(f(x), f(y)) < d(x,y) \quad \text{si } x \neq y$$

1. Montrer que f a au plus un pt fixe

Supposons que z et z' sont points fixes de f avec $z \neq z'$

alors $d(\underset{\substack{\parallel \\ z}}{f(z)}, \underset{\substack{\parallel \\ z'}}{f(z')}) < d(z,z')$ par $(*)$

Contradiction

2. Montrer $\exists z \in X$ tel que $d(z, f(z)) \leq d(x, f(x)) \ \forall x$

On considère $\Phi : X \to \mathbb{R}$
$$x \mapsto d(x, f(x))$$

On montre que Φ est continue (en fait Lipsch.) :

Soient $x, y \in X$, on considère $|\Phi(x) - \Phi(y)|$

$$\parallel$$

$$|d(x,f(x)) - d(y,f(y))|$$

On suppose que $d(x,f(x)) \geq d(y,f(y))$, alors

$$|\Phi(x) - \Phi(y)| = d(x,f(x)) - d(y,f(y))$$
$$\leq d(x,y) + \cancel{d(y,f(y))} + d(f(y),f(x)) - \cancel{d(y,f(y))}$$

$$< d(x,y) + d(x,y) = 2d(x,y)$$

$(*)$ d'où Φ est lipsch. donc continue.

X est compact, donc il existe $z \in X$ tel que

$\Phi(z) = \min_{x \in X} \Phi(x)$ et z convient

3. Montrer z est pt fixe de f

Supposons $z \neq f(z)$ alors $(*)$ $\underbrace{d(f(z), f(f(z)))}_{\Phi(f(z))} < \underbrace{d(z, f(z))}_{\Phi(z)}$

Contradiction avec la question précédente

4. Soit $x_0 \in X$. On pose $x_{n+1} = f(x_n)$ pour $n \geq 0$.
Montrer que la suite $(\underbrace{d(x_n, z)}_{d_n})$ converge vers $l \geq 0$.

si $x_n \neq z$

On a $d_{n+1} = d(x_{n+1}, z) = d(f(x_n), f(z))$

$$\underset{(*)}{<} d(x_n, z) = d_n$$

Remarque : si $x_n = z$ alors $d_n = 0$ et $d_m = 0$ $\forall m \geq n$

Donc la suite (d_n) est décroissante et minorée par 0

donc elle est convergente vers l.

5. Montrer que $l = 0$ et donc $x_n \to z$

Supposons $l > 0$.

Puisque X est compact, il existe $(x_{s(n)})$ sous-suite convergente disons $x_{s(n)} \to y \in X$ et donc $d(y, z) = l$

$z \neq y$

La sous-suite $(x_{s(n)+1})$

alors elle est convergente et converge vers $f(y)$

$$x_{s(n)+1} = f(x_{s(n)}) \longrightarrow f(y)$$

car f est continue (car lipschitz)

d'où $d(f(y), z) = l$

Et donc $l = d(f(y), z) \underset{*}{<} d(y, z) = l$

Contradiction

Donc $l = 0$ et $x_n \to z$