$(e_1, \dots, e_n)$ base de E $\longrightarrow$ $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ famille duale

Montrons que c'est une base de E^*.

• libre ? : $\alpha_1 e_1^* + \dots + \alpha_n e_n^* = 0_{E^*}$ $\quad \alpha_i \in \mathbb{K}$

$0_{E^*} : x \mapsto 0$

Donc $\forall x \in E$ $\quad \alpha_1 e_1^*(x) + \dots + \alpha_n e_n^*(x) = 0$

On prend $x = e_i$ $\rightsquigarrow$ $\alpha_i = 0$ $\quad$ donc c'est libre

car $\boxed{e_j^*(e_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$

• Générateur ? : $f \in E^*$, soit $x \in E$, on calcule

$$f(x) = f(e_1^*(x) e_1 + \dots + e_n^*(x) e_n)$$
$$= e_1^*(x) f(e_1) + \dots + e_n^*(x) f(e_n) \quad \text{par linéarité}$$

d'où $f = \underbrace{f(e_1)}_{\mathbb{K}} e_1^* + \dots + \underbrace{f(e_n)}_{\mathbb{K}} e_n^*$ $\quad$ d'où c'est générateur

---

$E \simeq E^*$ de manière non canonique (choix de base)

et $E^* \simeq E^{**}$ d'où $E \simeq E^{**}$ canonique

$\phi \in E^{**}$: $\phi : E^* \to \mathbb{K}$
$f \mapsto \phi(f)$

$E \simeq E^{**}$
$x \mapsto \phi_x$ $= \langle f, x \rangle$

avec $\phi_x(f) = f(x)$

Exercice : Base duale de $\underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}}_{\text{base de } \mathbb{R}^3}$

$e_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$

On calcule $e_1^*\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right) = \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z$ (avec $v = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$)

avec $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ à déterminer

$e_1^*(e_1) = 1$
$e_1^*(e_2) = 0$
$e_1^*(e_3) = 0$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1 \\ \alpha_1 - \alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

$\alpha_1 + \alpha_2 = 0$

$\alpha_3 = 1$
$\alpha_1 = 1$ $\alpha_2 = -1$

$e_1^*(v) = x - y + z$

et de même pour calculer e_2^*, e_3^*