Calculs de normes subordonnées

$|||\cdot|||$

$\|\cdot\|_X, \|\cdot\|_Y$

1. $\phi : C([0;1] \to \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$u \longmapsto \int_0^1 x\,u(x)\,dx$$

On calcule $$|||\phi|||_\infty = \sup_{u \neq 0} \frac{|\phi(u)|}{\|u\|_\infty} = \sup_{\|u\|_\infty \leq 1} |\phi(u)|$$

On a $$|\phi(u)| = \left| \int_0^1 x\,u(x)\,dx \right| \leq \int_0^1 x\,|u(x)|\,dx$$

$$\leq \int_0^1 x\,\|u\|_\infty\,dx = \|u\|_\infty \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}\|u\|_\infty$$

Si $u \neq 0$, on a $$\frac{|\phi(u)|}{\|u\|_\infty} \leq 1/2$$

d'où $$|||\phi|||_\infty \leq 1/2$$

Mais, $\forall u$, on a $$\frac{|\phi(u)|}{\|u\|_\infty} \leq |||\phi|||_\infty$$

On prend $u = c$, on a $\phi(u) = c\int_0^1 x\,dx = c/2$
avec $c \in \mathbb{R}$
$c > 0$

et $\|u\|_\infty = c$

donc $\dfrac{|\phi(u)|}{\|u\|_\infty} = \dfrac{1}{2}$ et on a $|||\phi|||_\infty = \dfrac{1}{2}$

Calculer $|||\phi|||_1$.

On calcule $|\phi(u)| = \left|\int_0^1 x u(x)\,dx\right| \leq \int_0^1 |xu(x)|\,dx$

$\leq \int_0^1 |u(x)|\,dx$ car $0 \leq x \leq 1$

$= \|u\|_1$

donc, si $u \neq 0$, $\dfrac{|\phi(u)|}{\|u\|_1} \leq 1$ et donc $|||\phi|||_1 \leq 1$.

On considère $u = c$ avec $0 < c$

$|\phi(u)| = \frac{1}{2}c$ et $\|u\|_1 = c$ #

$u = x$ $\quad |\phi(u)| = \int_0^1 x^2\,dx = 1/3$ et $\|u\|_1 = 1/2$

or $\dfrac{|\phi(u)|}{\|u\|_1} = 2/3$

$u = x^n$ $\quad |\phi(u)| = \int_0^1 x^{n+1}\,dx = \left[\frac{1}{n+2} x^{n+2}\right]_0^1 = \frac{1}{n+2}$

$\|u\|_1 = \int_0^1 x^n\,dx = \frac{1}{n+1}$

d'où $\quad \dfrac{|\phi(u)|}{\|u\|_1} = \dfrac{n+1}{n+2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$

or $1 \leq |||\phi|||_1$ donc $|||\phi|||_1 = 1$.

2. $\psi : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}$ $\qquad \|P\| = \sup_{x \in [0;1]} |P(x)|$

$P(X) \mapsto P'(0)$

Indication : Considérer la famille $P_n(X) = (X-1)^n$

On a $\|P_n\| = 1$, $P_n'(X) = n(X-1)^{n-1}$

d'où $|\psi(P_n)| = n$

et $\dfrac{|\varphi(P_n)|}{\|P_n\|} = n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$

La norme subordonnée de φ n'existe pas !

En effet, φ n'est pas continue