d distance sur $\mathbb{R}$: $d(x,y) = |x-y|$

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 1-x & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

1. $\delta(x,y) = |f(x) - f(y)|$. Montrer δ est une distance

- Symétrie : $\delta(x,y) = \delta(y,x)$ direct car $|f(x) - f(y)| = |f(y) - f(x)|$
- Inégalité triangulaire : $\delta(x,z) = |f(x) - f(z)| \leq |f(x) - f(y)| + |f(y) - f(z)|$

$$\leq \delta(x,y) + \delta(y,z)$$

- Séparation : $\delta(x,y) = 0$ ssi $x = y$

$\Leftarrow$: direct

$\Rightarrow$: $\delta(x,y) = 0 \Rightarrow f(x) = f(y)$

si $x, y \in \mathbb{Q}$ alors $f(x) = x$ $f(y) = y$ d'où $x = y$

si $x, y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ alors $f(x) = 1-x$, $f(y) = 1-y$ d'où $x = y$

On considère le cas restant $x \in \mathbb{Q}$, $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$:
(par symétrie)

alors $f(x) = x$ et $f(y) = 1-y$ d'où $y = 1-x \in \mathbb{Q}$

contradiction

Donc δ est une distance sur $\mathbb{R}$

2. On considère $\left(\frac{\sqrt{2}}{n}\right)_{n\geq 1}$. Notons que $\frac{\sqrt{2}}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

pour la distance classique.

Puisque $\frac{\sqrt{2}}{n} \notin \mathbb{Q}$, $\forall n$, on a $f\left(\frac{\sqrt{2}}{n}\right) = 1 - \frac{\sqrt{2}}{n}$

et $1 = f(1)$ d'où $\delta\left(\frac{\sqrt{2}}{n}, 1\right) = \frac{\sqrt{2}}{n}$

d'où $\frac{\sqrt{2}}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ pour la distance δ