Normes sur $C([0;1],\mathbb{R}) = \{f:[0,1]\to\mathbb{R} \text{ continues}\}$ $\mathbb{R}$-ev

$A = \{f\in E \mid f(0)=0\}$

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0;1]} |f(x)| \qquad |f|_1 = \int_0^1 |f(x)|\,dx$$

1. A est fermée pour $(E,\|.\|_\infty)$

Soit (f_n) une suite de fonctions de A qui converge dans E, disons $f=\lim f_n$. C'est-à-dire

$$\forall\varepsilon>0, \exists N, \forall n\geq N, \underbrace{\|f-f_n\|_\infty\leq\varepsilon}_{}$$

$$\forall x\in[0;1],\ |f(x)-f_n(x)|\leq\varepsilon$$

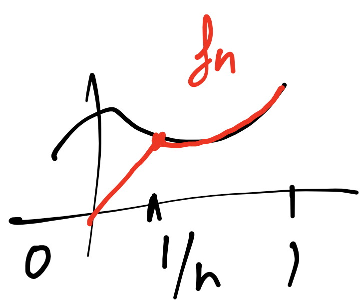
On prend $x=0$: $\forall\varepsilon>0 (\exists N, \forall n\geq N,)\ |f(0)|\leq\varepsilon$

d'où $f(0)=0$ et donc $f\in A$.

Conclusion : A est fermé

2. $f\in E$

On pose $(n\geq 1)$
$$f_n(x) = \begin{cases} f(1/n)\,nx & \text{si } 0\leq x\leq 1/n \\ f(x) & \text{sinon} \end{cases}$$



2.1 $f_n \in A$?

- $f_n \in E$? f_n est continue par morceaux

  et $f_n(1/n) = f(1/n) \times n \times \frac{1}{n} = f(1/n)$

  donc f_n est continue

- $f_n(0) = f(1/n).n.0 = 0$ car $0 \leq 0 \leq 1/n$

  donc $f_n \in A$

2.2 Montrer $\|f_n - f\|_1 \leq \frac{3}{2n}\|f\|_\infty$

On calcule $\|f_n - f\|_1 = \int_0^1 |f_n(x) - f(x)|\,dx$

$= \int_0^{1/n} + \int_{1/n}^{1}$ $=0$ car $f_n(x) = f(x)$ pour $1/n \leq x \leq 1$

$= \int_0^{1/n} \underbrace{|f(1/n)nx - f(x)|}_{\leq |f(1/n)nx| + |f(x)|}\,dx$

$$\leq \underbrace{|f(1/n)|}_{\leq \|f\|_\infty} . n \int_0^{1/n} x . dx + \int_0^{1/n} \underbrace{|f(x)|}_{\leq \|f\|_\infty} dx$$

$$\leq n\|f\|_\infty \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^{1/n} + \|f\|_\infty \times \frac{1}{n}$$

$$\leq \|f\|_\infty \left[\cancel{n} \times \frac{1}{2n^{\cancel{2}}} + \frac{1}{n}\right] = \frac{3}{2n}\|f\|_\infty$$

3. On a $\lim_{n \to +\infty} \|f_n - f\|_1 = 0$ par la question 2

et donc $f_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} f$ pour la norme $\|.\|_1$

donc $f \in \bar{A}$ $\forall f \in E$ d'où $\bar{A} = E$

A est dense dans E pour $\|.\|_1$

Montrer que $\lim_{n \to +\infty} \|f_n - f\|_\infty \neq 0$ (ou n'existe pas)

4. Calculer $\mathring{A}$ pour $\|\cdot\|_\infty$

$f \in \mathring{A}$ ssi $\exists r > 0$ tel que $B_\infty(f, r) \subseteq A$

Soit $r > 0$, on pose $g(x) = f(x) + r/2 \in E$

on a $\|g - f\|_\infty = r/2 < r$ donc $g \in B_\infty(f, r)$

mais $g(0) = r/2 \neq 0$ d'où $g \notin A$

Ainsi $\forall r > 0$, $B_\infty(f, r) \not\subseteq A$ pour tout $f \in A$

donc $\mathring{A} = \emptyset$ pour $\|\cdot\|_\infty$

De même, on montre que $\mathring{A} = \emptyset$ pour $\|\cdot\|_1$

(même raisonnement)