Norms sur $\ell^2(\mathbb{R})$

• $\|\cdot\|_2$ norme ?

.. $(x_n) \in \ell^2(\mathbb{R})$ avec $\|x\|_2 = 0 \iff \sum_{n \geq 0} x(n)^2 = 0$

$\iff x(n) = 0 \ \forall n \geq 0 \iff x = 0$

.. homogénéité ...

.. inégalité triangulaire pour $\|\cdot\|_2$ $\quad x, y \in \ell^2(\mathbb{R})$

dans $\mathbb{R}^n$ (espace euclidien)

Par Cauchy-Schwarz pour $N \geq 0$

$$\left(\sum_{n=0}^{N} x(n)y(n)\right)^2 \leq \left(\sum_{n=0}^{N} x(n)^2\right)\left(\sum_{n=0}^{N} y(n)^2\right)$$

$$\boxed{(a^2)^{1/2} = |a|}$$

On considère

$$\|x+y\|_2^2 = \sum_{n \geq 0} \left(x(n) + y(n)\right)^2 = \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=0}^{N} \left(x(n) + y(n)\right)^2$$

Mais $$\sum_{n=0}^{N} \left(x(n) + y(n)\right)^2 = \sum_{n=0}^{N} x(n)^2 + \sum_{n=0}^{N} y(n)^2 + 2\sum_{n=0}^{N} x(n)y(n)$$

$$\leq \sum_{n=0}^{N} x(n)^2 + \sum_{n=0}^{N} y(n)^2$$

$$+2\left|\sum_{n=0}^{N} x(n)y(n)\right|$$

$$\leq \sum_{n=0}^{N} x(n)^2 + \sum y(n)^2$$

par C.S. $\longrightarrow$

$$\underbrace{+2\left(\sum x(n)^2\right)^{1/2}\left(\sum y(n)^2\right)^{1/2}}$$

$$= \left[\left(\sum_{n=0}^{N} x(n)^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{n=0}^{N} y(n)^2\right)^{1/2}\right]^2$$

d'où

$$\left[\sum_{n=0}^{N}(x(n)+y(n))^2\right]^{1/2} \leq \left(\sum_{n=0}^{N} x(n)^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{n=0}^{N} y(n)^2\right)^{1/2}$$

On fait $N \to +\infty$ $\boxed{\|x+y\|_2 \leq \|x\|_2 + \|y\|_2}$

- Norme $\|\cdot\|_\infty$: inégalité triangulaire

$$\|x+y\|_\infty = \sup_n |x(n)+y(n)| \leq \sup_n |x(n)| + \sup_n |y(n)|$$

$$\|x\|_\infty + \|y\|_\infty$$

2. Montrer $\forall x \in \ell^2(\mathbb{R})$, $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2$

La suite (x) est majorée car $\sum x(n)^2 < +\infty$ donc $x(n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc il existe n_0 tel que $\|x\|_\infty = |x(n_0)|$

On a
$$\|x\|_2^2 = \sum_{n \geq 0} x(n)^2 = x(n_0)^2 + \sum_{n \neq n_0} x(n)^2$$
$$\geq x(n_0)^2 = \|x\|_\infty^2$$

et on a bien $\|x\|_2 \geq \|x\|_\infty$

3. Est-ce que les normes sont équivalentes ?
Est-ce qu'il existe $C > 0$ telle que $\forall x \in \ell^2(\mathbb{R})$
$$C . \|x\|_\infty \geq \|x\|_2 \ ?$$

On considère la suite (x_k) d'éléments de $\ell^2(\mathbb{R})$ définie par
$$\begin{cases} x_k(n) = 1 & \text{si } n \leq k \\ x_k(n) = 0 & \text{si } n > k \end{cases}$$

On a $\sum_{n \geq 0} x_k(n)^2 = k+1 < +\infty$ donc $x_k \in \ell^2(\mathbb{R})$

et $\|x_k\|_2 = \sqrt{k+1}$, mais $\|x_k\|_\infty = 1$

D'où $\forall C > 0$, il existe k tel que $\|x_k\|_2 > C\|x_k\|_\infty$

donc les normes $\|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$ ne sont pas équivalentes