$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt \qquad \Gamma(n+1) = n! \quad n \in \mathbb{N}$$

pour $x > 0$

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

$$\Gamma(0) = 1$$

---

1. $x, y > 0$ Montrer $t \mapsto \underbrace{t^{x-1}(1-t)^{y-1}}_{g_{x,y}(t)}$ intégrable sur $]0;1[$

On montre que $g_{x,y}$ converge (abs.) pour Riemann

On écrit $\int_{]0;1[} g_{x,y} = \int_{]0;1/2]} g_{x,y} + \int_{]1/2;1[} g_{x,y}$. Sur $]0;1/2[$,

on a $g_{x,y}(t) \leq t^{x-1}(1-t)^{-1} \leq 2t^{x-1} = 2/t^{1-x}$ pour $t \in]0;1/2]$

intégrable sur $]0;1[$ (et donc sur $]0;1/2[$) car $1-x < 1$

et $g_{x,y}(t) \leq t^{-1}(1-t)^{y-1} \leq 2(1-t)^{y-1}$ pour $t \in]1/2;1[$

aussi intégrable pour les mêmes raisons (on peut faire $u = 1-t$ pour se ramener au cas précédent)

2. $x, y > 0$

$$I = \int_{\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*} t^{x-1} s^{y-1} e^{-(t+s)} \, ds\,dt$$

Changement de variables : $u = t$, $v = t+s$

$\Phi(t,s) = (t, t+s)$ $\quad \Phi : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \to U$

$U = \{ (u,v) \in \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}_*^+ \mid v > u \}$

Φ C^1 difféomorphisme : Φ bijective d'inverse

$(u,v) \mapsto (u, v-u)$

$$\det J_\phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$$

Th chgt de variable $\leftarrow$ intégrale de L.

$$I = \int_U u^{x-1} (v-u)^{y-1} e^{-v} \times 1 \times du\,dv$$

Tonnelli

$$\overset{\downarrow}{=} \int_{[0;+\infty[} e^{-v}\left(\int_{[0;+\infty[} u^{x-1}\underbrace{(v-u)^{y-1}}_{v^{y-1}(1-u/v)^{y-1}}\,du\right)dv$$

$$= \int_{[0;+\infty[} e^{-v} v^{y-1} \int_{[0;+\infty[} u^{x-1}(1-u/v)^{y-1}\,dv$$

Chgt de variables : $w = u/v$ dét. jacobien $1/v$

....

$$I = \int_{[0;+\infty[} e^{-v} v^{y-1} v^{x} \int_{[0;1[} w^{x-1}(1-w)^{y-1}\,dw$$

$$= B(x,y)\,\Gamma(x+y)$$

3. Montrer $B(x,y) = \dfrac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$

$$I = \int_{\mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}_*^+} t^{x-1} s^{y-1} e^{-(t+s)} \, ds\, dt$$

Tonnelli

$$= \underbrace{\int_{\mathbb{R}_*^+} t^{x-1} e^{-t}}_{\Gamma(x)} \left(\underbrace{\int_{\mathbb{R}_*^+} s^{y-1} e^{-s} \, ds}_{\Gamma(y)} \right) dt$$