μ mesure de comptage sur $[0;1]$ avec mesurable $= \mathcal{B}([0;1])$

1. $\Delta = \{(x,x) \mid x \in [0;1]\}$. Δ borélien de $\mathbb{R}^2$?
de $[0;1]^2$?

Oui, on pose $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x-y$ mesurable

et $\Delta = f^{-1}(\{0\}) \cap [0;1]^2$ est borélien pour $\mathbb{R}^2$

$f_0 : [0;1]^2 \to \mathbb{R}$ $\quad f_0 = f_{|[0;1]^2}$ borélienne

et $\Delta = f_0^{-1}(\{0\})$ borélien pour $[0;1]^2$

2. $$I_1 = \int_{[0;1]} \left(\int_{[0;1]} \chi_\Delta(x,y)\, d\lambda(x) \right) d\mu(y)$$

$\forall y \in [0;1]$

$x \mapsto \chi_\Delta(x,y) = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$ donc c'est une fonction borélienne positive

donc elle possède une intégrale. On a

$$\int_{[0;1]} \chi_\Delta(x,y)\, d\lambda(x) = \underbrace{\lambda(\{y\})}_{\chi_\Delta = 0 \text{ ppt}} = 0$$

donc I_1 existe et $I_1 = 0$.

$$I_2 = \int_{[0;1]} \underbrace{\left(\int_{[0;1]} \chi_\Delta(x,y)\, d\mu(y) \right)}_{\text{existe comme ci-dessus}} d\lambda(x)$$

et $$\int_{[0;1]} \chi_\Delta(x,y)\, d\mu(y) = \mu(\{x\}) = 1$$

$$\boxed{\int_A c\, d\mu = c \times \mu(A)}$$

donc I_2 existe et $I_2 = 1$

Remarque : $I_1 \neq I_2$

La mesure produit $\mu \otimes \lambda$ n'existe pas car μ n'est pas σ-finie

sinon $\exists E_n$ mesurable avec $\mu(E_n) < +\infty$ et $[0;1] = \bigcup_n E_n$

$\Rightarrow E_n$ fini