$$f(x) = \frac{\sin(x)}{e^x - 1}$$

1. f intégrable sur $[0;+\infty[$

- Trouver g intégrable avec $|f| \leq g$ sur $[0;+\infty[$ sur $[0;+\infty[$

- Calculer $\int_{]0;+\infty[} |f|$ et vérifier que c'est fini

$$\int_{]0;+\infty[} |f| \;\; = \;\; \int_{[0;+\infty[} |f|$$

donner le résultat

Ou encore $\int_0^{+\infty} |f(x)|\,dx$ (existe et) est fini

$$f(x) = \frac{\sin x}{e^x - 1}$$

On a $$\int_0^{+\infty} |f(x)|\,dx = \underbrace{\int_0^2 |f(x)|\,dx}_{\leq \int_0^2 \frac{x}{e^x-1}\,dx} + \underbrace{\int_2^{+\infty} |f(x)|\,dx}_{\leq \int_2^{+\infty} \frac{1}{e^x-1}\,dx}$$

car $|\sin(x)| \leqslant |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$

On a $x \leqslant e^x - 1 \quad \forall x \geqslant 0$

d'où $$\int_0^2 \frac{x}{e^x-1}\,dx \leqslant \int_0^2 dx \leqslant 2$$

On a $e^x - 1 \geqslant e^{x-1}$ pour $x \geqslant 2$

d'où $$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{e^x-1} \leqslant \int_2^{+\infty} \frac{dx}{e^{x-1}} = e^{-1}$$

donc $$\int_0^{+\infty} |f(x)|\,dx \leqslant 2 + e^{-1}$$

et donc f est Lebesgue-intégrable sur $[0; +\infty[$

---

2. Montrer $f(x) = \sum_{n \geqslant 1} e^{-nx} \cdot \sin x$ pour $x > 0$

et pour $x = 0$?

Soit $x>0$, alors $e^{-x}<1$ et donc

$$\frac{\sin x}{e^x-1} = \frac{\sin(x)}{e^x(1-e^{-x})} = e^{-x}\sin(x)\sum_{n\geq 0}(e^{-x})^n$$

$$= \sin(x)\sum_{n\geq 1} e^{-nx} \quad \leftarrow \text{vaut } 0 \text{ en } x=0$$

Pour $x=0$, on a $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\(x>0)}} \frac{\sin(x)}{e^x-1} = 1$

3. En déduire $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{e^x-1}dx = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2+1}$

Par la question 1,

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin(x)}{e^x-1}dx = \int_{[0;+\infty[}\frac{\sin(x)}{e^x-1}dx = \int_{[0;+\infty[}\left(\sum_{n\geq 1} e^{-nx}\sin x\right)dx$$

On pose $f_n(x) = e^{-nx}\sin(x)$

On a $\int_{[0;+\infty[}|f_n(x)|dx \leq \int_{[0;+\infty[} e^{-nx}dx \overset{\text{justifier}}{=} \int_0^{+\infty} e^{-nx}dx$

$$= \left[-\frac{1}{n} e^{-nx} \right]_0^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{n}$$

↳ la série ne converge pas

$$\int_0^{+\infty} |f_n(x)|\,dx \leq \int_0^{+\infty} x e^{-nx}\,dx \qquad |\sin(x)| \leq x \quad \forall x \geq 0$$

$$\int_0^{+\infty} x e^{-nx}\,dx = \frac{1}{n^2}$$

et la série $\sum_{n\geq 1} 1/n^2$ converge

On en déduit $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{e^x - 1}\,dx = \int_{[0;+\infty[} \frac{\sin(x)}{e^x - 1}\,dx = \sum_{n\geq 1} \int_{[0;+\infty[} e^{-nx} \sin(x)\,dx$

$$= \sum_{n\geq 1} \int_0^{+\infty} e^{-nx} \sin(x)\,dx \underset{\substack{\uparrow \\ 2\ \text{ipp}}}{=} \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2+1}$$

on $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-nx} \sin(x)\,dx = \mathrm{Im}\left(\int_0^{+\infty} e^{ix-nx}\,dx \right)$

Soit $y \geqslant 0$. $F(y) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \underbrace{\frac{e^{-x^2 y}}{1+x^2}}_{f(x,y)} dx$

1. F continue sur $\mathbb{R}_+$

- Remarquer que intégrale de Lebesgue = intégrale de R.
  (car $F(y) < +\infty$)

- Appliquer le théorème du cours sur l'intégrale de 2.
  - $\forall y$ $x \mapsto f(x,y)$ mesurable (continue) ✓
  - ppt x $y \mapsto f(x,y)$ continue ✓
  - $\exists \underbrace{g}_{g(x)}$ intégrable avec $|f(x,y)| \leq g(x)$ $\forall y$ ppt x ✓

$g(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

Donc F est continue

2. Calculer $F(0)$ et $\lim\limits_{y \to +\infty} F(y)$

$$F(0) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \left[\arctan x\right]_0^{+\infty} = \pi/2$$

$$\lim_{y\to+\infty} F(y) = \lim_{\substack{n\to+\infty \\ n\in\mathbb{N}}} F(n) = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2 n}}{1+x^2}\,dx$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \underbrace{\int_{[0;+\infty[} \frac{e^{-x^2 n}}{1+x^2}\,dx \overset{\text{cvg dominée}}{=} \int_{[0;+\infty[} \Big(\underbrace{\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{-x^2 n}}{1+x^2}}_{\substack{\downarrow \text{ ppt } x \\ 0}} \Big)\,dx}$$

$$\lim_{y\to+\infty} F(y) = 0$$

3. F dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$: appliquer le théorème du cours

4. Trouver équa. diff. vérifiée par F avec $I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$

On a $F'(y) = \displaystyle\int_{[0;+\infty[} \frac{-x^2 e^{-x^2 y}}{1+x^2}\,dx = \int_{[0;+\infty[} \left(\frac{-(1+x^2)e^{-x^2 y}}{1+x^2} + \frac{e^{-x^2 y}}{1+x^2} \right) dx$

$$= \int_{[0;+\infty[} -e^{-x^2 y} \, d\lambda + F(y)$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-x^2 y} \, dx + F(y)$$

chgt de variables
$u = \sqrt{y}\,x \quad (y \geq 0)$

$$F'(y) = -\frac{1}{\sqrt{y}} \int_0^{+} e^{-x^2} dx + F(y) = -\frac{1}{\sqrt{y}} I + F(y)$$

5. Résoudre l'équa. diff

6. Calculer I

Par la méthode de Duhamel, on trouve
ou variation de la constante

$$F(y) = I \int_y^{+\infty} \frac{e^{y-t}}{\sqrt{t}} dt$$

$u = \sqrt{t}$

On a $F(0) = I \int_0^{+\infty} e^{-t}/\sqrt{t} \, dt = I \int_0^{+\infty} 2e^{-u^2} du$

$$F(0) = 2I^2 \quad \text{d'où} \quad I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\parallel$$

$$\pi/2$$