$\underline{Ex}$: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ C^1 $\forall x \neq 0,\ x f(x) < 0$

$$\begin{cases} y' = f(y) & t \in \mathbb{R} \quad \text{avec } y_0 > 0 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

1. Th. Cauchy-Lips. Solution (y, J)

2. Montrer $t \mapsto y(t)^2$ décroissante

Posons $z(t) = y(t)^2$. On calcule $z'(t) = 2y'(t)y(t)$

$= 2f(y(t))\,y(t)$ $\nearrow$ $= 0$ si $y(t) = 0$

< 0 si $y(t) \neq 0$

d'où $z'(t) \leq 0$ $\forall t \in J$ donc z est décroissante

3. J contient $[0, +\infty[$ et $\exists\, l \geq 0$ tq $\lim\limits_{\infty} y^2 = l$

Notons que J contient 0 puisque c'est une solution.

On pose $J =]\alpha, \beta[$ avec $\alpha < 0$. Supposons que

$\beta < +\infty$. Alors par le théorème d'explosion en temps

fini, on a $\lim\limits_{t \to \beta^-} |y(t)| = +\infty$ d'où $\lim\limits_{t \to \beta^-} z(t) = +\infty$

Mais c'est impossible puisque z est décroissante : $z(t) \leq z(0)$ $\forall t \geq 0$

Donc on a bien $[0;+\infty[\subseteq J$.

On sait que $t \mapsto y(t)^2$ décroissante et elle est minorée par 0 · donc elle converge vers $\ell \geq 0$.

4. On suppose $\ell > 0$

a. Montrer : $\forall t \geq 0$, $y(t) > 0$ et $\lim_{\infty} y(t) = \sqrt{\ell}$

On a $y(0) > 0$ puisque $y(0) = y_0 > 0$.

Donc s'il existe $\underbrace{t_1 \geq 0 \text{ avec } y(t_1) \leq 0,}$

d'où il existe t_0 avec $y(t_0) = 0$ d'où

$y(t_0)^2 = 0 \iff z(t_0) = 0$. Mais comme z est décroissante et ≥ 0, on en déduit $\lim_{\infty} z(t) = 0$

d'où $\ell = 0$. Contradiction Donc $\forall t \geq 0$, $y(t) > 0$.

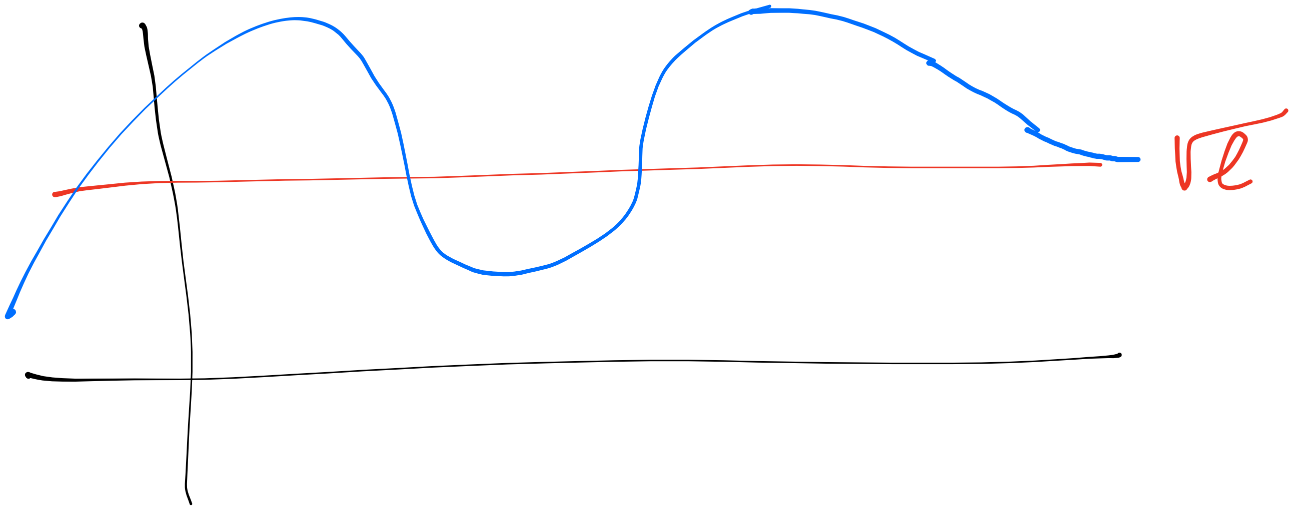
On a alors $y(t) = \sqrt{y(t)^2} = \sqrt{z(t)}$

d'où $\lim_{\infty} y(t) = \sqrt{\lim_{\infty} z(t)} = \sqrt{\ell}$.

(b) Montrer y' a une limite en $+\infty$ puis $f(\sqrt{\ell})=0$

On a $y'=f(y)$ avec f continue et y a une limite finie en $+\infty$ donc y' a une limite en $+\infty$

et $\lim\limits_{\infty} y' = f(\lim\limits_{\infty} y) = f(\sqrt{\ell})$.



Par l'inégalité des accroissements finis, pour tout $n\in\mathbb{N}$, il existe $\underset{\underset{c_n}{\shortparallel}}{c}\in[n;n+1]$ avec $y(n+1)-y(n) = y'(c)$

Alors $\lim\limits_{\infty} y'(c_n) = 0$ puisque $\lim\limits_{\infty} y(n+1) = \lim\limits_{\infty} y(n) = \sqrt{\ell}$

mais $\lim\limits_{\infty} y' = f(\sqrt{\ell})$ d'où $f(\sqrt{\ell})=0$.

c. Conclure.

Puisque $\ell > 0$, $\sqrt{\ell} \neq 0$ donc $\sqrt{\ell} . f(\sqrt{\ell}) < 0$ par hyp. sur f

mais $f(\sqrt{\ell}) = 0$. Contradiction

Conclusion : $\ell = 0$

On a montré : y décroissante avec $\lim_{\infty} y = 0$.
(strict. positive)

5. Il existe $\alpha > 0$: $\forall x \in \mathbb{R}$ $x f(x) \leq -\alpha x^2$

Montrer $\forall t \geq 0$, $y(t) \leq y_0 e^{-\alpha t}$

$x > 0$

$f(x) \leq -\alpha x$

On a $y(t) = \int_0^t y'(t)\, dt + y_0$

$$= \int_0^t f(y(t))\, dt + y_0$$

$y(t) > 0$

$$\leq y_0 + \int_0^t -\alpha y(t)\, dt$$

On applique le lemme de Gronwall,

On trouve

$$y(t) \leqslant y_0\, e^{\int_0^t -\alpha\, ds} = y_0\, e^{-\alpha t}$$