Equation $y^{(3)} + 3y'' - 4y = 0$ à résoudre sur $\mathbb{R}$

- Écrire comme éqn. d'ordre 1

$Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \end{pmatrix}$ avec y solution

Y est solution de l'équation $Y' = MY$

pour une matrice M

$$Y' = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \\ y^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \\ -3y'' + 4y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \end{pmatrix}$$

L'équation devient $Y' = MY$ avec $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

Solutions : $\boxed{Y(t) = e^{tM} y_0}$ $y_0 \in \mathbb{R}^3$

Il faut calculer e^{tM}

On diagonalise M :

• Polynôme caract. $C_M(T) = T^3 + 3T^2 - 4$
$= (T+2)^2(T-1)$

valeur propre -2 mult. 2
——— 1 mult. 1

• vp 1 : vecteur propre $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

• vp -2 : $\dim(E_{-2}) = 1 \rightsquigarrow$ non diagonalisable
vecteur propre $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

On cherche v_2 solution de $(M+2I)v_2 = v_1$

On trouve $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

On pose $P = (v_1 | v_2 | v_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

alors $M = PJP^{-1}$ avec $J = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

et $e^{tM} = P e^{tJ} P^{-1}$

$$e^{tJ} = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}(tJ)^n = \underbrace{\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} t^n J^n}$$ ← à calculer

On peut montrer par récurrence

$$J^n = \begin{pmatrix} (-2)^n & n(-2)^{n-1} & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ pour } n \geq 0 \quad \to e^t$$

On trouve pour le calcul e^{tJ}

$$\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} t^n (-2)^n = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} (-2t)^n = e^{-2t}$$

$$\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} t^n n(-2)^{n-1} = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{(n-1)!} \underbrace{t^n}_{= t.t^{n-1}} (-2)^{n-1}$$

$$= t \sum_{n\geq 1} \frac{1}{(n-1)!} (-2t)^{n-1} = t e^{-2t}$$

d'où $$e^{tJ} = \begin{pmatrix} e^{-2t} & te^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix}$$

Solutions:

$$Y = e^{tA} y_0 = P e^{tJ} P^{-1} y_0$$

Il faut calculer P^{-1} et le produit des matrices

$$P e^{tJ} P^{-1} =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{9}te^{2t} + \frac{1}{9}e^{-2t} + \frac{8}{9}e^{t} & \frac{1}{9}te^{-2t} & -\frac{1}{9}te^{-2t} - \frac{2}{9}e^{-2t} + \frac{2}{9}e^{t} \\ & * & \end{pmatrix}$$

Syst. fondamentale

$$Y = e^{tA} y_0 \quad \text{avec} \quad Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \end{pmatrix}$$

$$y_0 = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{pmatrix} \quad \mu_i \in \mathbb{R}$$

Solutions: $y(t) = (\text{—})\mu_1 + (\text{—})\mu_2 + (\text{—})\mu_3$