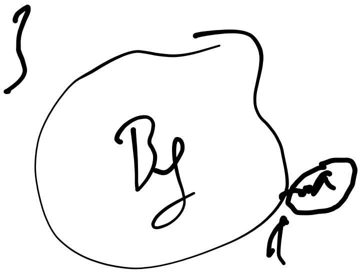
$x \in X$, $r > 0$ $\quad B(x,r) = \{y \in X \mid d(x,y) < r\}$



1. $B_f(x,r) = \{y \in X \mid d(x,y) \leq r\}$

$B_f(x,r)$ fermé $\iff B_f(x,r)^c = X \setminus B_f(x,r)$ ouvert

Soit $a \in B_f(x,r)^c$ donc $\underbrace{d(x,a) > r}$, on doit montrer qu'il existe $\rho > 0$ tel que $B(a,\rho) \subseteq B_f(x,r)^c$.

Notons $\underset{d>0}{r+d} = d(x,a)$. On prend $\rho = \frac{d}{2} > 0$ car $d > 0$.

Soit $b \in B(a,\rho)$. Alors $d(x,b) \geq |d(x,a) - d(a,b)|$

$$\geq d(x,a) - d(a,b)$$

$$> r + d - \frac{d}{2} > r$$

d'où $b \in B_f(x,r)^c$ or ~~or~~ un fermé $B_f(x,r)$

2. $\overline{B(x,r)}$ = adhérence de $B(x,r)$

= plus petit fermé contenant $B(x,r)$

$$= \bigcap_{\substack{F \text{ fermé} \\ B(x,r) \subseteq F}} F$$

Montrer que $\overline{B(x,r)} \subseteq B_f(x,r)$

$B_f(x,r)$ est fermé et $B(x,r) \subseteq B_f(x,r)$

d'où $\overline{B(x,r)} \subseteq B_f(x,r)$

$\overset{\circ}{\overbrace{B_f(x,r)}}$ = plus grand ouvert contenu dans $B_f(x,r)$

$$= \bigcup_{\substack{U \text{ ouvert} \\ U \subseteq B_f(x,r)}} U$$

Montrer $B(x,r) \subseteq \overset{\circ}{\overbrace{B_f(x,r)}}$ direct

---

3. X evn (espace vectoriel normé)

$\forall x \in X$ $\quad \overline{B(x,r)} = B_f(x,r) \qquad \overset{\circ}{\overbrace{B_f(x,r)}} = B(x,r)$

$\forall r > 0$

Il faut montrer $B_f(x,r) \subseteq \overline{B(x,r)}$

c'est-à-dire $\forall F$ fermé avec $B(x,r) \subseteq F$

alors $B_f(x,r) \subseteq F$

(pour plus tard)

4. Exemple d'espace métrique avec $\overline{B(x,r)} \neq B_f(x,r)$

et $\overset{\circ}{\overbrace{B_f(x,r)}} \neq B(x,r)$

X avec la distance triviale d

$\overset{\shortparallel}{\{x,y\}}$

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

$B(x,1) = \{z \in X \mid d(x,z) < 1\} = \{x\}$ donc $\{x\}$ ouvert

de même $\{y\}$ ouvert

mais $X \setminus \{x\} = \{y\}$ donc $\{y\}$ est aussi fermé

pareil pour $\{x\}$

d'où $\overline{B(x,1)} = \{x\}$

$B_f(x,1) = \{z \in X \mid d(x,z) \leq 1\}$

$= \{x,y\}$

donc $\overline{B(x,1)} \neq B_f(x,1)$

De même $\overset{\circ}{B_f}(x,1) = \{x,y\} \neq B(x,1) = \{x\}$

$B_f(x,r) \subseteq \overline{B(x,r)}$

Soit ~~(???)~~ $v \in B_f(x,r)$, $r>0$ existe $(v_n) \subseteq B(x,r)$

avec $v_n \to v$. Soit F un fermé contenant $B(x,r)$

alors $(v_n) \subseteq F$ donc $\lim v_n \in F$ donc $v \in F$ et $B_f(x,r) \subseteq F$

et ainsi $B_f(x,r) \subseteq \overline{B(x,r)}$

On pose $w = v - x$, on pose $v_n = v + \frac{1}{n} w$ pour $n \geq 1$

On a $\lim v_n = v$ car $\frac{1}{n} w \to 0$

et $v_n \in B(x, r)$ par calcul